Compte rendu du stage de L3

Théorème de Banach Stone et groupes compacts

Roulley Emeric
Encadré par les Prs. Eric Ricard et Roland Vergnioux

Table des matières

Introduction

Le but de ce stage a été d'étudier l'ensemble des fonctions continues sur un compact K à valeurs complexes, noté $\mathcal{C}(K)$, pour savoir de quelle structure l'on devait le munir afin de retrouver d'une part la topologie de K, et d'autre part une structure de groupe sur K.

Dans la première partie, nous démontrons le théorème de Banach-Stone, qui affirme que si l'on connait la structure d'espace vectoriel à isométrie près de $\mathcal{C}(K)$, alors on peut retrouver la structure topologique de K. Nous donnons aussi une variante de ce théorème qui dit que si l'on connait la structure d'algèbre de Banach de $\mathcal{C}(K)$, alors on peut retrouver la structure topologique de K.

Dans la seconde partie, nous introduisons les notions d'algèbres de Hopf et de Woronowicz et nous démontrons que si G est un groupe, alors $\mathcal{C}(G)$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Hopf (ou de Woronowicz). Réciproquement, nous démontrons que si l'on connait la structure d'algèbre de Hopf ou de Woronowicz de $\mathcal{C}(K)$, alors on peut retrouver la structure de groupe compact de K.

1 Théorème de Banach-Stone

Notations :
Pour $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique :
On note $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des ouverts de X.
On note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X.
On note $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des boréliens de X.
Pour tout $x \in X$, on note $\mathcal{V}_X(x)$ l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X.
On note X^* (et pas X' attention) le dual topologique de X. On notera indifféremment $f(x)$ ou $\langle f, x\rangle_{X^*,X}$ ou encore $\langle f, x\rangle$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté (crochet de dualité).
Pour K compact, on note $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$.
On munit $\mathcal{C}(K)$ de la norme infinie $||.||_\infty$ (licite).
$\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de leur topologie usuelle.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1.1 Compléments sur la théorie de la mesure et théorème de représentation de Riesz-Markov

On introduit juste ici les notions élémentaires pour comprendre la suite, sans rentrer dans les détails et sans donner les preuves. Ces dernières sont consultables au [Rud1].

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable (où $X = (X, \mathcal{T})$ est un espace topologique).

1.1.1 Mesures complexes

Définition 1. *Une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$ est par définition une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que :*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Pour toute réunion disjointe dénombrable $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

Remarque : L'ordre d'indexation des ensembles formant la partition n'important pas, on obtient (par un théorème bien connu sur les séries) que la série converge absolument, donnant ainsi une bonne définition.

Définition 2. *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$.*
La variation de μ, notée $|\mu|$, est l'application définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, |\mu|(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| / (A_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ est une partition finie de } A \text{ en ensembles } \mathcal{A}\text{−mesurables}\}.$$

La variation totale de la mesure complexe μ est la quantité $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Théorème 1 (Rud1 6.6.2. et 6.6.4.). *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$. Alors $|\mu|$ est une mesure positive finie sur $(X, \mathcal{A})$.*

Théorème 2 (Rud1 6.6.12.). *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$. Alors il existe $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-mesurable telle que $|f| = 1$ et $\forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \int_A f d|\mu|$.*
On note alors $d\mu = f d|\mu|$.

1.1.2 Régularité des mesures

On suppose désormais que l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé.

Définition 3. *On appelle mesure de Borel sur X une mesure borélienne (i.e. définie sur les boréliens de X) (positive) telle que :*

$$\forall K \text{ compact de } X, \mu(K) < +\infty.$$

Définition 4. *Soit μ une mesure de Borel sur X. On dit que :*

1. *μ est intérieurement régulière si $\forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \sup\{\mu(K) | K \in \mathcal{K}(X), K \subset A\}$.*
2. *μ est extérieurement régulière si $\forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \inf\{\mu(O) | O \in \mathcal{O}(X), A \subset O\}$.*
3. *μ est régulière si μ et intérieurement régulière et extérieurement régulière.*

Soit μ une mesure complexe. On dit que μ est régulière si $|\mu|$ est régulière.

On note $M(X)$ l'ensemble des mesures complexes régulières. On munit $M(X)$ de la norme de variation totale, que l'on notera indifféremment $||.||$ ou $||.||_{M(X)}$.

1.1.3 Théorème de représentation de Riesz-Markov

Théorème 3 (Riesz-Markov Rud1 6.6.19.)**.** *Soit K un espace topologique compact. Alors l'application* $R : M(K) \to \mathcal{C}(K)^*$ *est une isométrie linéaire surjective.*

$$\mu \mapsto \left(\begin{array}{rcl} R_\mu : \mathcal{C}(K) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_K f d\mu \end{array} \right)$$

Remarques :

- Une isométrie surjective est bijective (car toute isométrie est injective).
- Grâce à ce théorème, on s'autorisera à identifier $\mathcal{C}(K)^*$ et $M(K)$.
- Ce résultat reste vrai pour un espace topologique K dit localement compact (i.e. où tout point admet un voisinage compact) en remplaçant $\mathcal{C}(K)$ par $\mathcal{C}_0(K)$.
- L'intégrale selon une mesure complexe est définie comme l'on se l'imagine.

1.2 Topologie faible* sur le dual

1.2.1 Éléments de topologie

On introduit ici les notions de topologie nécessaires pour comprendre la suite. Il s'agit de rappels et de compléments de L3.

Définition 5. *Soit X un ensemble.*
Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques (où I est un ensemble).
Pour tout $i \in I$ on considère une application $f_i : X \to Y_i$.
La topologie initiale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est par définition la topologie la moins fine rendant continues les applications f_i pour $i \in I$.

Remarque : Cette définition est licite, car une intersection de topologies est une topologie.

Définition 6. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Une semi-norme sur X est une application $p : X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(x, y) \in X^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $p(0) = 0$.
- $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$.
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes (où I est un ensemble) est dite séparante si
$\forall x \in X\backslash\{0\}, \exists i \in I, p_i(x) \neq 0$.

Définition 7. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur X (où I est un ensemble).
L'ensemble Θ des parties U de E telles que pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ et J une partie finie de I tels que $\bigcap\limits_{j\in J} B_{p_j}(x, \varepsilon) \subset U$ où $B_{p_j}(x, \varepsilon) = \{y \in X | p_j(x - y) < \varepsilon\}$ est une topologie sur X, appelée la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.

Lemme 1 (Pau 2.1.(1))**.** *La topologie définie par une famille de semi-normes est séparée si et seulement si la famille de ces semi-normes est séparante.*

Lemme 2 (rappel du cours de topologie)**.** *Soit K un espace topologique compact.*
Soit Y un espace topologique séparé.
Soit $f : K \to Y$ une application injective et continue.
Alors f est un homéomorphisme sur son image.

Lemme 3 (Urysohn (Pau 1.13.))**.** *Soit K un espace topologique compact.*
Soient F et F' deux fermés disjoints de K.
Alors il existe une application continue $f : K \to [0, 1]$ telle que

$$\forall x \in F, f(x) = 0 \text{ et } \forall x' \in F', f(x') = 1$$

Remarque : Ce résultat reste vrai pour un espace topologique dit normal (i.e. où deux fermés disjoints ont des voisinages disjoints).

Définition 8. *Soit X un ensemble.*
On dit que X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique, si X est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les opérations $\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ *et* $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times X & \to & X \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ *soient continues et que $\{0\}$ soit une partie fermée.*

Remarque : un espace vectoriel normé, muni de la topologie induite par sa norme, est un espace vectoriel topologique.

Lemme 4 (rappel d'algèbre linéaire)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\varphi, f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(\varphi)$.
Alors il existe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.

1.2.2 Topologie faible*

Théorème 4 (Hahn-Banach (forme analytique réelle))**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) & \textit{(sous-additive).} \\ \forall x \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+, p(tx) = tp(x) & \textit{(positivement homogène de degré 1).} \end{cases}$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Soit f une forme linéaire sur F telle que $\forall x \in F, f(x) \leqslant p(x)$.
Alors il existe un prolongement linéaire $\tilde{f}$ de f à E vérifiant $\forall x \in E, \tilde{f}(x) \leqslant p(x)$.

Preuve :

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prolongements de f constitué des paires (G, g) où G est un sev de E contenant F et g est une forme linéaire sur G tels que : $g|_F = f$ et $\forall x \in G, g(x) \leqslant p(x)$.
  Alors :
  - ∗ $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (car $(F, f) \in \mathcal{P}$).
  - ∗ On définit un ordre partiel $\prec$ sur $\mathcal{P}$ défini par :
  $$(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2) \Leftrightarrow G_1 \subset G_2 \text{ et } g_2|_{G_1} = g_1.$$
  - ∗ Soit S une partie totalement ordonnée de $\mathcal{P}$: $S = \{(G_\lambda, g_\lambda)\}$.
  On considère $\tilde{G} = \bigcup_{\lambda} G_\lambda$ qui est un sev de E
  et $\tilde{g}$ défini sur $\tilde{G}$ par $\forall x \in \tilde{G}, \tilde{g}(x) = g_\lambda(x)$ si $x \in G_\lambda$ qui est une forme linéaire sur $\tilde{G}$, bien définie, car les G_λ sont totalement ordonnés.
  Alors $(\tilde{G}, \tilde{g})$ est un majorant de S.

  D'où, par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $(G, g) \in \mathcal{P}$.
- On suppose par l'absurde que $G \neq E$: il existe $x_0 \in E \backslash G$.
  On cherche $h(x_0)$ tel que h définie sur $H = G + \mathbb{R}x_0$ par $h(x + tx_0) = g(x) + th(x_0)$ satisfasse :
  $$\forall x \in G, \forall t \in \mathbb{R}, g(x) + th(x_0) \leqslant p(x + tx_0).(\star)$$
  En particulier :
  $$\sup_{x \in G}(g(x) - p(x - x_0)) \leqslant h(x_0) \leqslant \inf_{x \in G}(p(x + x_0) - g(x)).$$
  Or :
  $$\forall (x, x') \in G^2, h(x) + h(x') = h(x + x') \leqslant p(x + x') \leqslant p(x + x_0) + p(x - x_0)$$
  Donc $(\star)$ est satisfaite pour un $h(x_0)$ ainsi choisi.
  De plus $G \subset H$ et $h|_G = g$.
  Donc (G, g) n'est pas maximal. Contradiction. D'où $G = E$.

On admet l'énoncé dans le cas complexe :

Théorème 5 (Hahn-Banach (forme analytique complexe))**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) & \textit{(sous-additive).} \\ \forall x \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+, p(tx) = tp(x) & \textit{(positivement homogène de degré 1).} \\ \forall \theta \in \mathbb{U}, \forall x \in E, p(x) = p(\theta x) & \end{cases}$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Soit f une forme linéaire sur F telle que $\forall x \in F, |f(x)| \leqslant p(x)$.
Alors il existe un prolongement $\mathbb{C}$-linéaire $\tilde{f}$ de f à E vérifiant $\forall x \in E, |\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$.

Définition 9. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.*
La topologie faible, notée $wk*$, est par définition la topologie initiale sur X^* (le dual topologique de X) définie par $(Ev_x)_{x\in X}$ où $\forall x \in X, Ev_x :$* $\begin{array}{ccc} X^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$.

Remarques :

- Cette définition est licite, car le théorème de Hahn-Banach implique que le dual topologique X^* est non-trivial.
- Par définition, la topologie faible* est la topologie de X^* la moins fine qui rende continues les applications Ev_x pour tout $x \in X$.
- La topologie faible* est engendrée par $\{Ev_x^{-1}(U) | U \in \mathcal{O}(\mathbb{K}), x \in X\}$.
- La topologie est séparée (car donnée par la famille séparante de semi-normes $(f \mapsto |f(x)|)_{x\in X}$ (cf. lemme 1)).

1.3 Opérateurs

1.3.1 Adjoint et isométrie

Définition 10. *On appelle opérateur toute application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés.*

Remarque : En réalité, la définition d'opérateur ne comporte pas la notion de continuité.
On parle d'opérateur borné pour désigner un opérateur continu (car il y a équivalence des deux notions (cf. [Rud2] 1.32.)).

Théorème 6. *Soient $(X, ||.||_X)$ et $(Y, ||.||_Y)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.*
Soit $T : X \to Y$ un opérateur.
Alors il existe un unique opérateur $T^* : Y^* \to X^*$ tel que :

$$\forall f \in Y^*, \forall x \in X, (T^*(f))(x) = f(T(x)) \text{ et } ||T||_{\mathcal{L}_c(X,Y)} = ||T^*||_{\mathcal{L}_c(Y^*,X^*)}.$$

En utilisant les crochets de dualité, cette formule s'écrit $\langle T^*(f), x\rangle = \langle f, T(x)\rangle$.
T^* est appelé l'adjoint de T.

Preuve :

- On définit T^* par $\forall f \in Y^*, T^*(f) = f \circ T$. Alors pour tout $f \in Y^*$, $T^*(f)$ est une application de X dans $\mathbb{K}$, linéaire et continue (comme composée d'applications linéaires et continues). Donc $\forall f \in Y^*, T^*(f) \in X^*$.
  De plus $\forall x \in X, \forall f \in Y^*, \langle T^*(f), x\rangle = (T^*(f))(x) = (f \circ T)(x) = f(T(x)) = \langle f, T(x)\rangle$.
  Ainsi T^* est définie de manière unique et est une application de Y^* dans X^*.
-   * $\forall x \in X, \forall (f_1, f_2) \in (Y^*)^2, \langle T^*(f_1+f_2), x\rangle = \langle f_1+f_2, T(x)\rangle = \langle f_1, T(x)\rangle+\langle f_2, T(x)\rangle = \langle T^*(f_1), x\rangle + \langle T^*(f_2), x\rangle = \langle T^*(f_1) + T^*(f_2), x\rangle$.
      D'où $T^*(f_1 + f_2) = T^*(f_1) + T^*(f_2)$.
    * De même, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in Y^*, T^*(\alpha f) = \alpha T^*(f)$.
      D'où T^* est linéaire.
- $\forall f \in Y^*, ||T^*(f)||_{X^*} = ||f \circ T||_{X^*} \leqslant ||f||_{Y^*}||T||_{\mathcal{L}_c(X,Y)}$.
  D'où T^* est continue. C'est donc un opérateur.
- $||T||_{\mathcal{L}_c(X,Y)} = \sup\limits_{\substack{||x||_X \leqslant 1 \\ ||f||_{Y^*} \leqslant 1}} |\langle f, T(x)\rangle| = \sup\limits_{\substack{||x||_X \leqslant 1 \\ ||f||_{Y^*} \leqslant 1}} |\langle T^*(f), x\rangle| = \sup\limits_{||f||_{Y^*} \leqslant 1} ||T^*(f)||_{X^*} = ||T^*||_{\mathcal{L}_c(Y^*,X^*)}$.

Théorème 7. *Soient $(X, ||.||_X)$ et $(Y, ||.||_Y)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.*
Soit $T : X \to Y$ une isométrie linéaire surjective.
Alors $T^* : Y^* \to X^*$ est une isométrie linéaire surjective et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Preuve :

- On pose $S = T^{-1}$. D'après le théorème précédent, il est licite de considérer S^* et T^*.
  $\forall f \in X^*, \forall x \in X, \langle (T^* \circ S^*)(f), x\rangle = \langle T^*(S^*(f)), x\rangle = \langle S^*(f), T(x)\rangle = \langle f, S(T(x))\rangle$
  $= \langle f, (S \circ T)(x)\rangle = \langle f, x\rangle$.
  D'où $T^* \circ S^* = Id_{X^*}$.
  De même, on montre que $S^* \circ T^* = Id_{Y^*}$.
  D'où T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
- Soit $f \in Y^*$.
  D'après le théorème précédent, $||T^*||_{\mathcal{L}_c(Y^*,X^*)} = ||T||_{\mathcal{L}_c(X,Y)} = 1$ (car T est une isométrie).
  De même, $||(T^*)^{-1}||_{\mathcal{L}_c(X^*,Y^*)} = ||(T^{-1})^*||_{\mathcal{L}_c(X^*,Y^*)} = ||T^{-1}||_{\mathcal{L}_c(Y,X)} = 1$.
  D'où $||f||_{Y^*} = ||(T^*)^{-1}(T^*(f))||_{Y^*} \leqslant ||T^*(f)||_{X^*} \leqslant ||f||_{Y^*}$.
  En fait, il y a égalité dans les inégalités précédentes. D'où, $||T^*(f)||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$.
  Donc T^* est une isométrie bijective.

1.3.2 Topologie faible* et opérateurs

Proposition 1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique dont la topologie $\mathcal{T}$ est définie par une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes (où I est un ensemble).*
Soit $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est $\mathcal{T}$-continue.

(2) $\exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in X, |f(x)| \leqslant C \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(p_i(x))$.

Preuve :

- On suppose (1).
  Alors f est continue en 0. Comme f est linéaire, $f(0) = 0$.
  Donc $V := f^{-1}(B_{|.|}(0,1)) \in \mathcal{V}_X(0)$.
  Par définition de la topologie $\mathcal{T}$, il existe U un ouvert de $\mathcal{T}$ tel que $U \subset V$,
  $U = \bigcap\limits_{n_j\in J} B_{p_{n_j}}(0, r_{n_j})$ avec $J \subset I$ fini.
  On pose $r = \inf\limits_{n_j\in J}(r_{n_j})$ et $k = \max\limits_{n_j\in J}(n_j)$.
  Si $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(p_j(x)) < r$, alors $|f(x)| < 1$ (avec $C = \frac{1}{r}$). On en déduit le résultat par linéarité.
- On suppose (2).
  Soit $r > 0$. Soit $B_{|.|}(0, r) \subset \mathbb{C}$.
  $B_{|.|}(0, r) = \{y \in \mathbb{C}/|y| < r\}$.
  Donc $f^{-1}(B_{|.|}(0, r)) = \{x \in X/|f(x)| < r\}$.
  Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on pose $r_j > 0$ tel que $r_j < \frac{r}{2C}$.
  Soit $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} B_{p_j}(0, r_j)$. Alors $\forall j \in [\![1, k]\!], p_j(x) < r_j < \frac{r}{2C}$.
  Par hypothèse, on a donc $|f(x)| \leqslant C \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(p_j(x)) < C\dfrac{r}{2C} = \dfrac{r}{2}$.
  Donc $x \in f^{-1}(B_{|.|}(0, r))$. D'où $\underbrace{\bigcap\limits_{j=1}^{k} B_{p_j}(0, r_j)}_{\text{ouvert de } \mathcal{T}} \subset f^{-1}(B_{|.|}(0, r))$.
  D'où f est continue en 0, et comme f est linéaire, f est continue.

Proposition 2. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique.*
On munit X^* de la topologie faible.*
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X^*, \mathbb{C})$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) φ est continue.

(2) $\exists x \in X, \varphi = Ev_x$.

Preuve :

- On suppose (2).
  Alors, par définition de la topologie faible*, φ est continue.
- On suppose (1).
  On considère la famille $(p_x)_{x\in X}$ de semi-normes donnant la topologie faible* :
  $\forall x \in X, p_x : \begin{array}{ccc} X^* & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & |f(x)| \end{array}$.
  D'après le théorème précédent, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$\forall f \in X^*, |\varphi(f)| \leqslant C \max_{1\leqslant i\leqslant k}(|f(x_i)|)$.

On en déduit que $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(Ev_{x_i}) \subset \ker(\varphi)$.

D'après le lemme 4, il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathbb{C}^k$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Ev_{x_i}$.

Or $\forall f \in X^*, \varphi(f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Ev_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) = f(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i}_{\text{noté } x\in X}) = Ev_x(f)$.

D'où $\varphi = Ev_x$.

Lemme 5 (Pau remarque au 2.2)**.** *Soit X un espace topologique.*
Soit Y un espace vectoriel topologique dont la topologie est donnée par une famille de semi-normes $(\rho_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble).
Soit $T : X \to Y$ linéaire.
Alors T est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $\rho_i \circ T$ est continue.

Théorème 8. *Soient X et Y deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.*
Soit $T : (X^*, wk*) \to (Y^*, wk*)$ linéaire.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est continue.

(2) $\exists U : Y \to X, T = U^*$.

Preuve :

- (2) $\Rightarrow$ (1) est évident.
- On suppose (1).
  - ✻ On note $(\rho_x)_{x\in X}$ (resp. $(p_y)_{y\in Y}$) la famille de semi-normes donnant la topologie faible* de X^* (resp. Y^*).
    Alors d'après la proposition 1 et le lemme 5, la continuité de T équivaut à :
    $\forall y \in Y, \exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N}^*, \exists (x_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in X^k, \forall f \in X^*, p_y(T(f)) \leqslant C \sum_{i=1}^{k} \rho_{x_i}(f)$.
    Donc, d'après la proposition 2, $\forall y \in Y, \exists x_y \in X, \forall f \in X^*, \langle T(f), y\rangle_{Y^*,Y} = \langle f, x_y\rangle_{X^*,X}$.
    On pose $U : \begin{array}{ccc} Y & \to & X \\ y & \mapsto & x_y \end{array}$.
  - ✻ On suppose par l'absurde qu'il existe $(x_1, x_2) \in X^2$ tel que :
    $\forall f \in X^*, \langle f, x_1\rangle = \langle T(f), y\rangle = \langle f, x_2\rangle$.
    Alors $\forall f \in X^*, \langle f, x_1 - x_2\rangle = 0$.
    Or le vecteur nul est le seul vecteur annulant toutes les formes linéaires, donc $x_1 = x_2$.
    Donc U est bien définie.
  - ✻ Soit $(y_1, y_2) \in Y^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.
    Alors $\forall f \in X^*, \langle f, U(\alpha y_1 + y_2)\rangle = \langle T(f), \alpha y_1 + y_2\rangle = \alpha\langle T(f), y_1\rangle + \langle T(f), y_2\rangle$
    $= \alpha\langle f, U(y_1)\rangle + \langle f, U(y_2)\rangle = \langle f, \alpha U(y_1) + U(y_2)\rangle$.
    Donc (même argument qu'à l'étoile précédente), $U(\alpha y_1 + y_2) = \alpha U(y_1) + U(y_2)$.
    D'où U est linéaire.
  - ✻ Soit $y \in Y$. Alors $||U(y)||_X = \sup_{f\in X^*, ||f||_X^* \leqslant 1} (|\langle T(f), y\rangle|) \leqslant ||T(f)||_{Y^*}||y||_Y$.
    D'où U est continue.

Lemme 6. *Soit K un espace topologique compact. Soit $x \in K$.*
On considère l'application $\delta_x : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$.
Alors $\delta_x \in \mathcal{C}(K)^*$ et $||\delta_x||_{\mathcal{C}(K)^*} = 1$.

Preuve :
Clairement δ_x est linéaire.
$\forall f \in \mathcal{C}(K), |\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant ||f||_\infty$.
Donc $\delta_x \in \mathcal{C}(K)^*$ et $||\delta_x||_{\mathcal{C}(K)^*} \leqslant 1$.
De plus , il y a égalité dans l'inégalité précédente pour $f \equiv 1$.
D'où, $||\delta_x||_{\mathcal{C}(K)^*} = 1$.

Remarques :
— Ce résultat reste vrai si K est seulement supposé séparé, en remplaçant $\mathcal{C}(K)$ par $\mathcal{C}_b(K)$ l'ensemble des fonctions continues bornée sur K.
— La notation δ_x est aussi utilisée pour les masses de Dirac. La correspondance entre les deux est donnée par le théorème de représentation de Riesz-Markov.

Théorème 9. *Soit K un espace topologique compact.*
Alors $\Omega : \begin{array}{ccc} K & \to & (C(K)^*, wk*) \\ x & \mapsto & \left(\delta_x : \begin{array}{ccc} C(K) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array} \right) \end{array}$ *est un homéomorphisme sur son image.*

Preuve :
- Ω est bien définie d'après le lemme 6.
- K est compact.
- $(C(K)^*, wk*)$ est séparé.
- Soit $(x, y) \in K^2$ tel que $x \neq y$.
Comme K est compact, par le lemme d'Urysohn ($\{x\}$ et $\{y\}$ étant deux fermés disjoints), il existe une application continue $f : K \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$.
Ainsi, $(\Omega(x))(f) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = (\Omega(y))(f)$.
Donc $\Omega(x) \neq \Omega(y)$.
D'où Ω est injective.
- On note $(p_f)_{f \in \mathcal{C}(K)}$ la famille de semi-normes donnant la topologie faible*.
Soit $\bigcap_{i=1}^{k} B_{p_{f_i}}(\mu_i, r_i)$ un ouvert de la topologie $wk*$.
Alors $\Omega^{-1}(\bigcap_{i=1}^{k} B_{p_{f_i}}(\mu_i, r_i)) = \bigcap_{i=1}^{k} \Omega^{-1}(B_{p_{f_i}}(\mu_i, r_i))$.
On peut donc raisonner sur une seule boule $B_{p_f}(\mu, r)$.
$\Omega^{-1}(B_{p_f}(\mu, r)) = \{x \in K / \delta_x \in B_{p_f}(\mu, r)\} = \{x \in K / p_f(\mu - \delta_x) < r\}$
$= \{x \in K / |\int_K f d\mu - f(x)| < r\} = f^{-1}(\underbrace{B(\int_K f d\mu, r)}_{\text{dans } \mathbb{C}})$.
Comme f est continue il s'agit d'un ouvert de K.
D'où Ω est continue.
D'où, par le lemme 2, Ω est un homéomorphisme sur son image.

1.4 Points extrémaux

Définition 11. *Soit X un espace vectoriel. Soit C un ensemble convexe de X.*
Soit $(x_1, x_2) \in C^2$ avec $x_1 \neq x_2$.
On appelle segment ouvert joignant x_1 et x_2 l'ensemble $(x_1, x_2) := [x_1, x_2] \backslash \{x_1, x_2\}$.

Définition 12. *Soit X un espace vectoriel. Soit C un convexe de X. Soit $x \in C$.*
On dit que x est un point extrémal de C s'il n'existe aucun segment ouvert de C contenant x.
On note $Ext(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.
$x \in Ext(C) \Leftrightarrow (\forall (y,z) \in C^2, \forall \lambda \in]0,1[, x = \lambda y + (1-\lambda)z \Rightarrow y = x = z)$.
$x \notin Ext(C) \Leftrightarrow \exists (y,z) \in C^2, y \neq z, \exists \lambda \in]0,1[, x = \lambda y + (1-\lambda)z$.

Remarque : On peut toujours prendre $\lambda = \frac{1}{2}$ pour vérifier si un point est extrémal ou non.

Proposition 3. *Soient X et Y deux espaces vectoriels.*
Soit C un convexe de X. Soit $x \in C$.
Soit $T : X \to Y$ une isométrie linéaire surjective (donc bijective).
Alors $x \in Ext(C) \Leftrightarrow T(x) \in Ext(T(C))$.

Preuve :

- Soit $x' \in T(C)$. On suppose que $x' \notin Ext(T(C))$: il existe $(y', z') \in T(C)^2, y' \neq z'$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $x' = \lambda y' + (1-\lambda)z'$.

  Comme T est surjective, il existe $(x,y,z) \in C^3$ tel que $\begin{cases} x' = T(x) \\ y' = T(y) \\ z' = T(z) \end{cases}$.

  Comme $y' \neq z'$, il vient : $y \neq z$.
  Comme T est linéaire, on a : $T(x) = \lambda T(y) + (1-\lambda)T(z) = T(\lambda y + (1-\lambda)z)$.
  Comme T est injective, il vient : $x = \lambda y + (1-\lambda)z$.
  Donc $x \notin Ext(C)$.
  Par contraposée, $x \in Ext(C) \Rightarrow T(x) \in Ext(T(C))$.
- La réciproque se fait de la même manière.

Proposition 4. *Soit K un espace topologique compact.*
Soit μ une mesure de probabilité régulière sur K telle que $\forall A \in \mathcal{B}(K), \mu(A) \in \{0,1\}$.
Alors, il existe $k \in K$ tel que $\mu = \delta_k$.

Preuve :
On pose $\mathcal{F} = \{F \subset K / F$ est fermé et $\mu(F) = 1\}$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $K \in \mathcal{F}$).
On pose $A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

- On suppose par l'absurde que $A = \emptyset$.
  A est alors une intersection vide de fermés de K qui est compact.
  Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{F}^n$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$.
  On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{Soit } (F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{F}^n. \text{ Alors } \mu(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) = 1.$$

  * Soit $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}^2$. Alors $\mu(F_1 \cap F_2) + \mu(F_1 \cup F_2) = \underbrace{\mu(F_1)}_{=1} + \underbrace{\mu(F_2)}_{=1} = 2$.

    Comme μ ne prend que les valeurs 0 et 1, il vient : $\mu(F_1 \cap F_2) = 1$ $(= \mu(F_1 \cup F_2))$.
    D'où $\mathcal{P}(2)$.

* On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ $(n \geqslant 3)$.
Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{F}^n$. Alors : $\mu(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) + \mu(F_n \cup (\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i)) = \underbrace{\mu(F_n)}_{=1} + \underbrace{\mu(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i)}_{=1(H.R.)} = 2.$

Comme μ ne prend que les valeurs 0 et 1, il vient $\mu(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) = 1$. D'où $\mathcal{P}(n)$.

Ainsi, $0 = \mu(\emptyset) = \mu(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) = 1$. Contradiction. D'où $A \neq \emptyset$ $(\star)$.

- Soit $k \in A$ (licite d'après $(\star)$). Soit $O \in \mathcal{O}(K)$ tel que $k \in O$.
On suppose par l'absurde $\mu(O^c) = 1$. Alors $O^c \in \mathcal{F}$. Donc $k \in O^c$, i.e. $k \notin O$.
Contradiction. D'où $\mu(O^c) = 0$. Donc $\mu(O) = 1$.
Par régularité de μ, on a : $\mu(\{k\}) = \inf_{O\in\mathcal{O}(K), k\in O} \mu(O) = 1$.
D'où $supp(\mu) = \{k\}$ et donc $\mu = \delta_k$.

Remarque : On peut généraliser ce résultat de la façon suivante : toute mesure régulière ne prenant que deux valeurs est une masse de Dirac.

Proposition 5. *Soit K un espace topologique compact.*
On note $P(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité régulières sur K.
Soit $\mu \in P(K)$.
Alors $\mu \in Ext(P(K)) \Leftrightarrow \exists k \in K, \mu = \delta_k$

Preuve :

- Soit $k \in K$.
Soient $(\mu_1, \mu_2) \in P(K)^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $\delta_k = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$.
Soit $A \in \mathcal{B}(K)$ tel que $A \subset \{k\}^c$.
Alors $0 = \delta_k(A) = \lambda\mu_1(A) + (1-\lambda)\mu_2(A)$. Donc $\mu_1(A) = 0 = \mu_2(A)$.
D'où $supp(\mu_1) = \{k\} = supp(\mu_2)$ (car μ_1 et μ_2 sont non-nulles), i.e. $\mu_1 = \delta_k = \mu_2$.
D'où $\delta_k \in Ext(P(K))$.
- Soit $\mu \in P(K)$. On suppose que $\forall k \in K, \mu \neq \delta_k$.
Alors d'après la proposition précédente, il existe $A \in \mathcal{B}(K)$ tel que $\mu(A) \in]0,1[$.
Pour tout $B \in \mathcal{B}(K)$, $B = (B\cap A) \sqcup (B \cap A^c)$.
On définit $\tilde{\mu_1}$ et $\tilde{\mu_2}$ de la façon suivante : $\forall B \in \mathcal{B}(K), \begin{cases} \tilde{\mu_1}(B) = \mu(B\cap A) \\ \tilde{\mu_2}(B) = \mu(B\cap A^c) \end{cases}$.
Alors $\forall B \in \mathcal{B}(K), \mu(B) = \mu(B\cap A) + \mu(B\cap A^c) = \tilde{\mu_1}(B) + \tilde{\mu_2}(B)$, donc $\mu = \tilde{\mu_1} + \tilde{\mu_2}$.
Or $\tilde{\mu_1}(K) = \mu(A) \neq 1$ et $\tilde{\mu_2}(K) = \mu(A^c) \neq 1$, donc il faut renormaliser pour avoir des mesures de probabilité.
On pose $\begin{cases} \mu_1 = \frac{\tilde{\mu_1}}{\mu(A)} \\ \mu_2 = \frac{\tilde{\mu_2}}{\mu(A^c)} \end{cases}$.
Alors $(\mu_1, \mu_2) \in P(K)^2$, $\mu_1 \neq \mu_2$ et $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ où $\lambda = \mu(A) \in]0,1[$.
D'où $\mu \notin Ext(P(K))$.

Théorème 10. *Soit K un espace topologique compact.*
Alors $Ext(B_{||.||_{M(K)}}(0,1)) = \{\alpha\delta_k / \alpha \in \mathbb{U}$ et $k \in K\}$.

Preuve :
$B_{||.||_{M(K)}}(0,1)$ est bien convexe.

- Soit $\alpha \in \mathbb{U}$. Soit $k \in K$.
  On suppose que $\alpha\delta_k = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in (B_{||.||_{M(K)}}(0,1))^2$, alors :
  $1 = |\alpha| = \frac{1}{2}|\mu_1(\{k\}) + \mu_2(\{k\})| \leqslant \frac{1}{2}(|\mu_1(\{k\})| + |\mu_2(\{k\})|) \leqslant \frac{1}{2}(||\mu_1|| + ||\mu_2||) \leqslant \frac{2}{2} = 1$.
  Donc les inégalités précédentes sont en fait des égalités, donc on en déduit que $|\mu_1(\{k\})| = 1 = |\mu_2(\{k\})|$. D'où l'on déduit que μ_1 et μ_2 sont des masses de Diracs en k : il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{U}^2$ tel que $\mu_1 = \beta\delta_k$ et $\mu_2 = \gamma\delta_k$.
  Or on a : $1 = |\alpha| \leqslant \frac{|\beta|+|\gamma|}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
  Là encore les inégalités sont en fait des égalités.
  On se retrouve donc dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : β et γ sont positivement colinéaires. Et comme ils appartiennent tous les deux à $\mathbb{U}$ il vient : $\beta = \gamma = \alpha$.
  D'où $\mu_1 = \alpha\delta_k = \mu_2$. Et donc $\alpha\delta_k \in Ext(B_{||.||_{M(K)}}(0,1))$.
  Les autres masses de Dirac (celles pondérées par un coefficient de module différent de 1) n'appartiennent évidemment pas à cet ensemble.
- Soit $\mu \in B_{||.||_{M(K)}}(0,1)$. On note $d\mu = fd|\mu|$ avec $|f| = 1$.
  On suppose que μ n'est pas une masse de Dirac.
  Alors en raisonnant sur le support, on voit que $|\mu|$ non-plus.
  Donc, d'après les propositions 4 et 5, $|\mu|$ étant une mesure positive d'après le théorème 1, il existe $(\mu_1, \mu_2) \in B_{||.||_{M(K)}}(0,1)^2$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $\mu_1 \neq \mu_2$ et $|\mu| = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$.
  On définit ν_1 et ν_2 de la façon suivante : $\forall A \in \mathcal{B}(K), \left\{ \begin{array}{lcl} \nu_1(A) & = & \displaystyle\int_A fd\mu_1 \\ \nu_2(A) & = & \displaystyle\int_A fd\mu_2 \end{array} \right.$.
  Comme $\mu_1 \neq \mu_2$ et $|f| = 1$, il vient : $\nu_1 \neq \nu_2$.
  Alors pour tout $A \in \mathcal{B}(K)$, on a :
  $\lambda\nu_1(A) + (1-\lambda)\nu_2(A) = \lambda \int_A fd\mu_1 + (1-\lambda)\int_A fd\mu_2 \underset{(\star)}{=} \int_A fd(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) = \int_A fd|\mu| = \mu(A)$.
  D'où $\mu = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$.
  Donc $\mu \notin Ext(B_{||.||_{M(K)}}(0,1))$.

Remarque : L'égalité $(\star)$ se prouve par le schéma classique :

$$\begin{array}{c} \text{Indicatrices} \\ \downarrow \\ \text{Fonctions étagées positives} \\ \downarrow \\ \text{Fonctions mesurables positives} \\ \downarrow \\ \text{Fonctions mesurables réelles} \\ \downarrow \\ \text{Fonctions mesurables complexes} \end{array}$$

1.5 Théorème de Banach-Stone

1.5.1 Énoncé

Théorème 11 (Banach-Stone)**.** *Soient K et L deux espaces topologiques compacts.*
Soit $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ une isométrie linéaire surjective (donc bijective).
Alors il existe $h \in \mathcal{C}(L)$ et $\varphi : L \to K$ un homéomorphisme tels que :

$$\begin{cases} \forall l \in L, |h(l)| = 1 \\ \forall f \in \mathcal{C}(K), \forall l \in L, (T(f))(l) = h(l)f(\varphi(l)) \end{cases}.$$

1.5.2 Preuve

- Comme $T : (\mathcal{C}(K), ||.||_\infty) \to (\mathcal{C}(L), ||.||_\infty)$ est une isométrie linéaire surjective, d'après le théorème 7, $T^* : (\mathcal{C}(L)^*, ||.||_{\mathcal{C}(L)^*}) \to (\mathcal{C}(K)^*, ||.||_{\mathcal{C}(K)^*})$ est aussi une isométrie linéaire surjective.
  Ainsi
  $$T^*(B_{||.||_{\mathcal{C}(L)^*}}(0,1)) = B_{||.||_{\mathcal{C}(K)^*}}(0,1).$$
  D'après la proposition 3, sachant que les boules unités sont convexes, on a :
  $$T^*(Ext(B_{||.||_{\mathcal{C}(L)^*}}(0,1))) = Ext(B_{||.||_{\mathcal{C}(K)^*}}(0,1)).$$
  D'après le théorème de Riesz-Markov, ceci s'écrit :
  $$T^*(Ext(B_{||.||_{M(L)}}(0,1))) = Ext(B_{||.||_{M(K)}}(0,1)).(\star)$$
  D'après le théorème 10, sachant que T^* est bijective, pour tout $l \in L$, il existe un unique $h(l) \in \mathbb{U}$ et il existe un unique $\varphi(l) \in K$ tels que :
  $$T^*(\delta_l) = h(l)\delta_{\varphi(l)}.$$
  Alors
  $$\forall l \in L, \forall f \in \mathcal{C}(K), T(f)(l) = \langle \delta_l, T(f)\rangle = \langle T^*(\delta_l), f\rangle = \langle h(l)\delta_{\varphi(l)}, f\rangle = h(l)\langle \delta_{\varphi(l)}, f\rangle = h(l)f(\varphi(l)).$$
- Montrons que h est continue.
  - ✻ h est une application de L dans $\mathbb{C}$.
    $\forall l \in L, (Ev_1 \circ T^* \circ \Omega)(l) = \langle T^*(\delta_l), 1\rangle = h(l)\langle \delta_{\varphi(l)}, 1\rangle = h(l)$.
    D'où $h = Ev_1 \circ T^* \circ \Omega$.
    D'après le théorème 9, Ω est un homéomorphisme de L dans $(\Omega(L), wk*)$.
    D'après le théorème 8, $T^* : (\Omega(L), wk*) \to (\mathcal{C}(K)^*, wk*)$ est une application continue.
    Par définition de la topologie faible*, $Ev_1 : (\mathcal{C}(K)^*, wk*) \to \mathbb{C}$ est continue.
    D'où h est continue : $h \in \mathcal{C}(L)$.
  - ✻ D'après le lemme 6, sachant que T^* est une isométrie, on a :
    $\forall l \in l, 1 = ||\delta_l||_{\mathcal{C}(L)^*} = ||T^*(\delta_l)||_{\mathcal{C}(K)^*} = |h(l)| \underbrace{||\delta_{\varphi(l)}||_{\mathcal{C}(K)^*}}_{=1} = |h(l)|$.
- Montrons que φ est continue.
  Comme Ω est un homéomorphisme, montrer la continuité de φ équivaut à montrer la continuité de $\Omega \circ \varphi : L \to (\mathcal{C}(K)^*, wk*)$.

* Soit $l \in L$. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $B_f(\Omega \circ \varphi(l), \varepsilon)$ ouvert de $\mathcal{C}(K)^*$ pour la topologie faible* (on se restreint à une boule car intersection finie et image réciproque commutent).
* Comme h est continue (en l), il existe $V_1 \in \mathcal{V}_L(l)$ tel que :
$$\forall x \in V_1, |h(x) - h(l)| < \frac{\varepsilon}{2||f||_\infty}.$$
* Comme T^* est continue pour la topologie faible* et que Ω est un homéomorphisme, il existe $V_2 \in \mathcal{V}_L(l)$ tel que :
$$\forall x \in V_2, |h(l)f(\varphi(l)) - h(x)f(\varphi(x))| = |(T(f))(l) - (T(f))(x)| = |(T^*(\delta_l))(f) - (T^*(\delta_x))(f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
* $\forall x \in V_1 \cap V_2, |((\Omega \circ \varphi)(l))(f) - ((\Omega \circ \varphi)(x))(f)| = |f(\varphi(l)) - f(\varphi(x))|$
$\underset{\text{car } |h|=1}{=} |h(l)f(\varphi(l)) - h(l)f(\varphi(x))|$
$= |h(l)f(\varphi(l)) - h(x)f(\varphi(x)) + (h(x) - h(l))f(\varphi(x))|$
$\leqslant |h(l)f(\varphi(l)) - h(x)f(\varphi(x))| + |h(x) - h(l)| \underbrace{|f(\varphi(x))|}_{\leqslant ||f||_\infty}$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Ainsi, $\Omega \circ \varphi$ est continue et donc φ est continue.

- Montrons que φ est injective.
Soit $(l_1, l_2) \in L^2$ tel que $l_1 \neq l_2$.
Comme Ω est injective, $\delta_{l_1} \neq \delta_{l_2}$, et donc, $\overline{h(l_1)}\delta_{l_1} \neq \overline{h(l_2)}\delta_{l_2}$.
Comme T est injective, T^* aussi d'après le théorème 7.
Ainsi $\delta_{\varphi(l_1)} = \underbrace{\overline{h(l_1)}h(l_1)}_{=|h(l_1)|=1} \delta_{\varphi(l_1)} = T^*(\overline{h(l_1)}\delta_{\varphi(l_1)}) \neq T^*(\overline{h(l_2)}\delta_{\varphi(l_2)}) = \underbrace{\overline{h(l_2)}h(l_2)}_{=|h(l_2)|=1} \delta_{\varphi(l_2)} = \delta_{\varphi(l_2)}$.
Comme Ω est bijective, il vient : $\varphi(l_1) \neq \varphi(l_2)$.
D'où φ est injective.
- Montrons que φ est surjective.
Soit $k \in K$. $\Omega(k) = \delta_k \in \mathcal{C}(K)^*$.
Comme T est surjective, $T^* : \mathcal{C}(L)^* \to \mathcal{C}(K)^*$ aussi d'après le théorème 7.
Donc il existe $\mu \in \mathcal{C}(L)^*$ tel que $T^*(\mu) = \delta_k$.
D'après le théorème de Riesz-Markov, on identifie $M(K)$ et $\mathcal{C}(K)^*$, de même pour $M(L)$ et $\mathcal{C}(L)^*$.
D'après le théorème 10, $\delta_k \in Ext(B_{||.||_{M(K)}}(0,1))$. Donc, d'après ($\star$), $\mu \in Ext(B_{||.||_{M(L)}}(0,1))$.
D'après le théorème 10, il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ et $l \in L$ tels que $\mu = \alpha\delta_l$.
Alors $\delta_k = T^*(\alpha\delta_l) = \alpha T^*(\delta_l) = \alpha h(l)\delta_{\varphi(l)}$.
Donc $\alpha = \overline{h(l)}$ et $\varphi(l) = k$.
D'où φ est surjective.
- * L est compact.
  * K est compact, donc séparé.
  * φ est continue et bijective.

D'où, d'après le lemme 2, φ est un homéomorphisme.

Remarque : Ce théorème traduit le fait que la topologie d'un compact est encodée dans l'ensemble des fonctions continues sur ce compact.

1.5.3 Variante et contre-exemple

Variante : On se propose de démontrer une variante du théorème de Banach-Stone dans le cas où T n'est plus une isométrie, mais une application linéaire continue multiplicative. Pour cela, il nous faut le lemme suivant :

Lemme 7. *Soit K un espace topologique compact.*
Soit $\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C}$ linéaire continue telle que $\forall (f,g) \in \mathcal{C}(K)^2, \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$.
Alors soit φ est nulle, soit $\exists k \in K, \varphi = \delta_k$.

Preuve :
$\varphi \in \mathcal{C}(K)^*$.
D'après le théorème de représentation de Riesz-Markov, on identifie $\mathcal{C}(K)^*$ et $M(K)$.
Il existe $\mu \in M(K)$ telle que $\forall (f,g) \in \mathcal{C}(K)^2, \int_K fg d\mu = \varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) = (\int_K f d\mu)(\int_K g d\mu)$.
Soit $A \in \mathcal{B}(K)$. Alors (cf. Rud1 2.24. (Lusin)) il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(K)^{\mathbb{N}}$ telle que
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, f_n(x) \in [0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbf{1}_A$ p.p..
Par continuité, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n^2 = \mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$ p.p..
D'où :
$\mu(A) = \int_K \mathbf{1}_A d\mu = \int_K \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^2 d\mu \underset{\text{Beppo Levi}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_K f_n^2 d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} (\int_K f_n d\mu)^2 \underset{\text{Beppo Levi}}{=} (\int_K \mathbf{1}_A d\mu)^2$
$= \mu(A)^2$.
Ainsi $\forall A \in \mathcal{B}(K)^2, \mu(A) \in \{0,1\}$.
Donc, d'après la proposition 4, ou bien φ est nulle, ou bien $\exists k \in K, \varphi = \mu = \delta_k$.

Théorème 12. *Soient K et L deux espaces topologiques compacts.*
Soit $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ une application linéaire bijective continue telle que :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}(K)^2, T(fg) = T(f)T(g).$$

Alors K est homéomorphe à L.

Preuve :

- Comme T est un opérateur, $T^* : \mathcal{C}(L)^* \to \mathcal{C}(K)^*$ existe.
  Soit $l \in L$. On pose $F_l = T^*(\delta_l)$.
  Alors $F_l : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C}$ est linéaire.
  Comme $\Omega_L : \begin{array}{ccc} L & \to & (\mathcal{C}(L)^*, wk*) \\ l & \mapsto & \delta_l \end{array}$ est un homéomorphisme et que T^* est continue pour la topologie faible*, il vient : F_l est continue.
  De plus, $\forall (f,g) \in \mathcal{C}(K)^2, F_l(fg) = (T^*(\delta_l))(fg) = (T(fg))(l) = (T(f))(l)(T(g))(l)$
  $= (T^*(\delta_l))(f)(T^*(\delta_l))(g) = F_l(f)F_l(g)$.
  D'où par le lemme précédent, sachant que T^* est bijective et $\delta_l \neq 0$, il existe $\varphi(l) \in K$ tel que $T^*(\delta_l) = F_l = \delta_{\varphi(l)}$.
  On définit ainsi une application $\varphi : L \to K$.
- Comme $T : (\mathcal{C}(K), ||.||_\infty) \to (\mathcal{C}(L), ||.||_\infty)$ est bijective et linéaire et que $(\mathcal{C}(K), ||.||_\infty)$ et $(\mathcal{C}(L), ||.||_\infty)$ sont des espaces de Banach, il vient par le théorème d'isomorphisme de Banach que T^{-1} est continue.
  Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(L)^2$, alors :
  $T(T^{-1}(fg)) = fg = T(T^{-1}(f))T(T^{-1}(g)) = T(T^{-1}(f)T^{-1}(g))$.
  D'où par injectivité de T : $T^{-1}(fg) = T^{-1}(f)T^{-1}(g)$.
  Ainsi, par le même argument que précédemment, $\forall k \in K, \exists \psi(k) \in L, (T^{-1})^*(\delta_k) = \delta_{\psi(k)}$.
  En appliquant T^* à l'égalité précédente, il vient :

$\forall k \in K, \delta_k = (T^* \circ (T^*)^{-1})(\delta_k) = (T^* \circ (T^{-1})^*)(\delta_k) = T^*(\delta_{\psi(k)}) = \delta_{\varphi\circ\psi(k)}$.
Comme $\Omega_K : \begin{array}{rcl} K & \to & (\mathcal{C}(K)^*, wk*) \\ k & \mapsto & \delta_k \end{array}$ est un homéomorphisme, il vient :
$\forall k \in K, \varphi \circ \psi(k) = k$, i.e. $\varphi \circ \psi = id_K$.
De même, $\psi \circ \varphi = id_L$.
D'où φ est bijective d'inverse ψ.

- La continuité de φ se prouve comme au théorème précédent (et de manière simplifiée, car il n'y a plus de h).
- $\varphi : L \to K$, L est compact, K est compact (donc séparé), φ est bijective et continue.
D'où par le lemme 2, φ est un homéomorphisme.

Contre-exemple : Le contre-exemple que l'on donne est celui où T est seulement une application linéaire bijective continue (et ni une isométrie, ni multiplicative). On pose $K = \mathbb{S} \cup \{\infty\}$ et $L = [0,1]$.
On pose $\psi : \begin{array}{rcl} L & \to & K \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} e^{i2\pi t} & \text{si } t \in [0,1[\\ \infty & \text{si } t = 1 \end{array} \right. \end{array}$. Alors ψ est clairement une bijection.
On considère $T : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(K) & \to & \mathcal{C}(L) \\ (f,\alpha) & \mapsto & T_{f,\alpha} : \begin{array}{rcl} L & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(\psi(t)) + \alpha t & \text{si } t \in [0,1[\\ f(1) + \alpha & \text{si } t = 1 \end{array} \right. \end{array} \end{array}$.
On pose $\tilde{T} : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(L) & \to & \mathcal{C}(K) \\ g & \mapsto & (G_g, g(1) - g(0)) \end{array}$, où $G_g : \begin{array}{rcl} \mathbb{S} & \to & \mathbb{C} \\ \underset{t\in[0,1[}{e^{i2\pi t}} & \mapsto & g(t) - (g(1) - g(0))t \end{array}$.

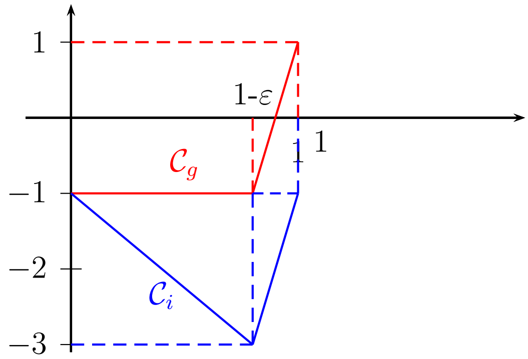
- $*$ Soit $(f,\alpha) \in \mathcal{C}(K)$.
  Alors $\tilde{T}(T(f,\alpha)) = \tilde{T}(T_{f,\alpha}) = (G_{T_{f,\alpha}}, T_{f,\alpha}(1) - T_{f,\alpha}(0))$.
  Or $T_{f,\alpha}(1) - T_{f,\alpha}(0) = f(1) + \alpha - f(1) = \alpha$.
  Et $\forall t \in [0,1[, G_{T_{f,\alpha}}(e^{i2\pi t}) = T_{f,\alpha}(t) - (T_{f,\alpha}(1) - T_{f,\alpha}(0))t = f(e^{i2\pi t}) + \alpha t - \alpha t = f(e^{i2\pi t})$.
  D'où $\tilde{T}(T(f,\alpha)) = (f,\alpha)$, i.e. $\tilde{T} \circ T = id_{\mathcal{C}(K)}$.

  $*$ Soit $g \in \mathcal{C}(L)$.
  Alors $\forall t \in [0,1[, T(\tilde{T}(g))(t) = T(G_g, g(1) - g(0))(t)$
  $= g(t) - (g(1) - g(0))t + (g(1) - g(0))t = g(t)$.
  Et $T(\tilde{T}(g))(1) = T(G_g, g(1) - g(0))(1) = G_g(\underbrace{1}_{=e^0}) + g(1) - g(0)$
  $= g(1) - (g(1) - g(0)) + (g(1) - g(0)) = g(1)$.
  D'où $T(\tilde{T}(g)) = g$, i.e. $T \circ \tilde{T} = id_{\mathcal{C}(L)}$.

  D'où T est inversible d'inverse $\tilde{T}$.
- On voit que $\tilde{T}$ est linéaire, donc T l'est aussi.
- $\forall (f,\alpha) \in \mathcal{C}(K), ||T(f,\alpha)||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(e^{i2\pi t}) + \alpha t| \leqslant ||f||_\infty + |\alpha| \leqslant 2||(f,\alpha)||_\infty$.
  De plus, il y a égalité lorsque $f = 1$ et $\alpha = 1$.
  D'où T est continue de norme égale à 2.
- $\forall g \in \mathcal{C}(L), ||T^{-1}(g)||_\infty = ||(G_g, |g(1) - g(0)|)||_\infty$
  $= \sup(\sup\limits_{t\in[0,1[} |g(t) - (g(1) - g(0))t|, |g(1) - g(0)|)$.
  Or $|g(1) - g(0)| \leqslant ||g||_\infty$.
  Et $\forall t \in [0,1[, |g(t) - (g(1) - g(0))t| \leqslant ||g||_\infty(1 + 2t) \leqslant 3||g||_\infty$.
  Donc $||T^{-1}||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(L),\mathcal{C}(K))} \leqslant 3$.

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction g définie sur L par :

$$\forall t \in [0,1], g(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } t \in [0, 1-\varepsilon] \\ \frac{2}{\varepsilon}t + 1 - \frac{2}{\varepsilon} & \text{si } t \in [1-\varepsilon, 1] \end{array} \right. .$$



Où $\forall t \in [0,1], i(t) = G_g(e^{i2\pi t}) = g(t) - (g(1) - g(0))t$

On a : $g \in \mathcal{C}(L)$.

Et $||T^{-1}(g)||_\infty = \sup(\sup_{t\in[0,1[} |i(t)|, 2) = 3$

D'où $||T^{-1}||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(L),\mathcal{C}(K))} = 3$.

On a : $||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(K),\mathcal{C}(L))}||T^{-1}||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(L),\mathcal{C}(K))} = 2 \times 3 = 6$.

Ainsi, $\mathcal{C}(K)$ et $\mathcal{C}(L)$ sont liés par une application linéaire bijective et continue. Mais, il n'y a aucune chance que K et L soient homéomorphes, car L est connexe alors que K ne l'est pas (deux composantes connexes).

Remarque : Le théorème de Banach-Stone reste valide pour un homéomorphisme linéaire T tel que $||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(K),\mathcal{C}(L))}||T^{-1}||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(L),\mathcal{C}(K))} < 2$ (cf. [Cam]).
Un contre-exemple dans le cas égal à 2 est donné par [Coh].

2 Structure de groupe compact

Soient X et Y deux ensembles finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(Y)$ sont deux algèbres de dimension finie n.
On a :

$$\mathcal{C}(X) \cong \mathbb{C}^n \cong \mathcal{C}(Y).$$

Donc la structure d'algèbre sur $\mathcal{C}(K)$, où K est un ensemble fini, ne se souvient que du cardinal de K. Ainsi, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathcal{C}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Mais $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en tant que groupe. Pour espérer retrouver la structure de groupe sur un compact K, il faut donc rajouter de la structure à $\mathcal{C}(K)$. On introduit donc les notions d'algèbres de Hopf et de Woronowicz.

2.1 Algèbres de Hopf et de Woronowicz

Soit K un corps.

2.1.1 Algèbres

Pour pouvoir définir la notion de cogèbre (et donc a posteriori celle d'algèbre de Hopf), on doit réécrire la définition d'une algèbre à l'aide d'applications linéaires. Se faisant, on pourra passer au dual via l'adjonction et ainsi définir une cogèbre par dualité.

Définition 13. *Une K-algèbre est un triplet $A = (A, m, u)$ où A est un K-espace vectoriel, $m : A \otimes A \to A$ et $\eta : K \to A$ sont des applications K-linéaires telles que :*

$$\begin{cases} m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m) \\ m \circ (\eta \otimes id) = id = m \circ (id \otimes \eta) \end{cases},$$

i.e. telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes m"] \arrow[d, "m\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, "id"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes K \arrow[l, "id\otimes\eta"'] \arrow[dl, "id"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Le premier diagramme traduit l'associativité de m et le second l'unité de A pour m. m est appelée le produit de A et η est appelée l'unité de A.

Remarques :

— On formalise en termes d'applications linéaires les axiomes d'associativité et d'unité pour une algèbre.

— $K \otimes A \overset{\varphi_1}{\cong} A \overset{\varphi_2}{\cong} A \otimes K$, où $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} K \otimes A & \to & A \\ \lambda \otimes x & \mapsto & \lambda x \end{array}$ et $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} A \otimes K & \to & A \\ x \otimes \lambda & \mapsto & \lambda x \end{array}$.

Il convient donc de les identifier.

Définition 14. *Soient (A, m_A, η_A) et (B, m_B, η_B) deux K-algèbres.*
Un morphisme de K-algèbres de A dans B est par définition une application K-linéaire $f : A \to B$ telle que :

$$\begin{cases} f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f) \\ f \circ \eta_A = \eta_B \end{cases},$$

i.e. telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Remarque : Cette formalisation traduit en termes d'applications linéaires les axiomes usuels d'un morphisme d'algèbres, à savoir : $f(ab) = f(a)f(b)$ et $f(1) = 1$.

Définition 15. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels.*
On appelle volte de E et F l'application K-linéaire $\tau_{E,F} : \begin{array}{ccc} E \otimes F & \to & F \otimes E \\ x \otimes y & \mapsto & y \otimes x \end{array}$.

Remarque : L'existence de cette application provient de la propriété universelle du produit tensoriel, sachant que $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire. L'unicité se vérifie aisément.

Théorème 13 (Bic 3.3.1.)**.** *Soient A et B deux K-algèbres.*
Alors $A \otimes B$ est une K-algèbre avec pour unité $1_A \otimes 1_B$ et le produit défini par :

$$\forall (a, a') \in A^2, \forall (b, b') \in B^2, (a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

Autrement dit, $m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes \tau_{B,A} \otimes id_B)$ et $\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$.

2.1.2 Cogèbres

Définition 16. *Une K-cogèbre est un triplet $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ où C est un K-espace vectoriel, $\Delta \to C \otimes C$ et $\varepsilon : C \to K$ sont des applications K-linéaires telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \end{array} \right. ,$$

i.e. telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\varepsilon"] & C \otimes K \\ & C \arrow[ul, "id"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

Le premier diagramme traduit la co-associativité de Δ et le second la co-unité de C pour Δ.
Δ est appelée le co-produit de C et ε est appelée la co-unité de C.

Proposition 6. *Soient A, B, C et D des K-espaces vectoriels de dimension finie.*
Soient $T \in \mathcal{L}(A, C)$ et $S \in \mathcal{L}(B, D)$.
Alors $(T \otimes S)^* = T^* \otimes S^*$ et si $D = A$, alors $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Preuve :

- On pose $\varphi : \begin{array}{ccl} A^* \times B^* & \to & (A \otimes B)^* \\ (f, g) & \mapsto & F_{f,g} : \begin{array}{ccc} A \otimes B & \to & \mathbb{C} \\ a \otimes b & \mapsto & f(a)g(b) \end{array} \end{array}$.

  Alors φ est une application bilinéaire. Donc, d'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\overline{\varphi} : A^* \otimes B^* \to (A \otimes B)^*$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A^* \times B^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] & (A \otimes B)^* \\ A^* \otimes B^* \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\forall (f, g) \in A^* \times B^*, \overline{\varphi}(f \otimes g) = \varphi(f, g) = F_{f,g}.$$

- ✻ $\dim((A\otimes B)^*) = \dim(A\otimes B) = (\dim(A))(\dim(B)) = (\dim(A^*))(\dim(B^*)) = \dim(A^*\otimes B^*)$.
- ✻ Soit $F\in\ker(\overline{\varphi})$: $F\in A^*\otimes B^*$ et $\overline{\varphi}(F)=0$.

  Par linéarité, on peut toujours supposer que $F=\sum_{i=1}^{k} f_i\otimes g_i$ où $k\in\mathbb{N}, k\leqslant n$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une famille libre d'éléments de A^*, et $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant k}\in(B^*)^k$.

  Alors $\overline{\varphi}(F)=0 \Leftrightarrow \overline{\varphi}(\sum_{i=1}^{k} f_i\otimes g_i)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}\overline{\varphi}(f_i\otimes g_i)=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} F_{f_i,g_i}=0$

  $\Leftrightarrow \forall b\in B, \sum_{i=1}^{k} g_i(b)f_i=0 \underset{\text{car } (f_i)_i \text{ est libre}}{\Leftrightarrow} \forall b\in B, \forall i\in[\![1,k]\!], g_i(b)=0$
  $\Leftrightarrow \forall i\in[\![1,k]\!], g_i=0$
  D'où $F=0$. Donc $\ker(\overline{\varphi})=\{0\}$, i.e. (par caractère linéaire) $\overline{\varphi}$ est injective.

  D'où $A^*\otimes B^*\cong(A\otimes B)^*$.

- On identifie $(A\otimes B)^*$ avec $A^*\otimes B^*$ et $(C\otimes D)^*$ avec $C^*\otimes D^*$.
  Soit $(f,g)\in C^*\times D^*$. Soit $(x,y)\in A\times B$, alors :
  $\langle (T\otimes S)^*(f\otimes g), x\otimes y\rangle = \langle f\otimes g, (T\otimes S)(x\otimes y)\rangle = \langle f\otimes g, T(x)\otimes S(y)\rangle = f(T(x))\otimes g(S(y)) = (T^*(f))(x)\otimes(S^*(g))(y) = \langle T^*(f)\otimes S^*(g), x\otimes y\rangle = \langle (T^*\otimes S^*)(f\otimes g), x\otimes y\rangle$.
  D'où $(T\otimes S)^* = T^*\otimes S^*$.
- On suppose $D=A$. Soit $f\in C^*$. Soit $x\in B$, alors :
  $\langle (T\circ S)^*(f), x\rangle = \langle f, T(S(x))\rangle = \langle T^*(f), S(x)\rangle = \langle (S^*\circ T^*)(f), x\rangle$.
  D'où $(T\circ S)^* = S^*\circ T^*$.

Théorème 14. *Soit (A,m,η) une K-algèbre de dimension finie. Alors (A^*,m^*,η^*) est une K-cogèbre de dimension finie.*

Preuve :

- D'après la proposition précédente, on a : $A^*\otimes A^*\cong(A\otimes A)^*$.
- On définit Δ (resp. ε) comme étant l'adjoint de m (resp. η).

$$\begin{array}{rrcl} \Delta: & A^* & \to & A^*\otimes A^*\cong(A\otimes A)^* \\ & f & \mapsto & \Delta(f): \begin{array}{rcl} A\otimes A & \to & \mathbb{C} \\ a\otimes b & \mapsto & f(ab)=f(m(a\otimes b)) \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} \varepsilon: & A^* & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

  - ✻ Δ et ε sont bien K-linéaires (car ce sont des adjoints).
  - ✻ D'après la proposition précédente, comme $m\circ(m\otimes id) = m\circ(id\otimes m)$, on a en passant à l'adjoint : $(m\otimes id)^*\circ m^* = (id\otimes m)^*\circ m^*$, i.e. $(m^*\otimes id)\circ m^* = (id\otimes m^*)\circ m^*$, i.e. $(\Delta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\Delta)\circ\Delta$.
  - ✻ De même, $(\eta\otimes id)^*\circ m^* = (id\otimes\eta)^*\circ m^*$, i.e. $(\eta^*\otimes id)\circ m^* = (id\otimes\eta^*)\circ m^*$, i.e. $(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\varepsilon)\circ\Delta$.
- $\dim(A^*)=\dim(A)<+\infty$.

D'où A^* est une K-cogèbre de dimension finie.

Théorème 15. *Soit (C,Δ,ε) une K-cogèbre de dimension finie. Alors $(C^*,\Delta^*,\varepsilon^*)$ est une K-algèbre de dimension finie.*

Preuve :

- Par la même démonstration qu'avant, on a : $(C \otimes C)^* \cong C^* \otimes C^*$.
- On définit m (resp. η) comme étant l'adjoint de Δ (resp. ε).

$$m: \begin{array}{rcl} C^* \otimes C^* \cong (C \otimes C)^* & \to & C^* \\ f \otimes g & \mapsto & \Delta^*(f \otimes g) \end{array} \quad \text{et} \quad \eta: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & C^* \\ \lambda & \mapsto & \lambda.1 \end{array}$$

  - ✻ m et η sont bien K-linéaires (car ce sont des adjoints).
  - ✻ Soit $(f, g, h) \in (C^*)^3$, alors :
    $m((m \otimes id)((f \otimes g) \otimes h)) = \Delta^*(\Delta^*(f \otimes g) \otimes h) = (((f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h) \circ \Delta$
    $= (f \otimes g \otimes h) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (f \otimes g \otimes h) \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta = (f \otimes ((g \otimes h) \circ \Delta)) \circ \Delta$
    $= \Delta^*(f \otimes \Delta^*(g \otimes h)) = m((id \otimes m)(f \otimes (g \otimes h)))$.
    D'où $m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$.
  - ✻ Soit $f \in C^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :
    $m((\eta \otimes id)(\lambda \otimes f)) = m(\lambda.1 \otimes f) = \lambda f$.
    $m((id \otimes \eta)(f \otimes \lambda)) = m(f \otimes \lambda.1) = \lambda f$.
    D'où $m \circ (\eta \otimes id) = id = m \circ (id \otimes \eta)$.
- $\dim(C^*) = \dim(C) < +\infty$.

D'où C^* est une K-algèbre de dimension finie.

Remarque : Les deux théorèmes précédents justifient a posteriori les dénominations de cogèbre (aussi appelée co-algèbre), de co-produit et de co-unité ("co" signifiant "dual").

Définition 17. *Soient $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux K-cogèbres.*
Un morphisme de K-cogèbres de C dans D est par définition une application K-linéaire $f : C \to D$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C \\ \varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C \end{cases},$$

i.e. telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varepsilon_C"] \arrow[d, "f"'] & K \\ D \arrow[ur, "\varepsilon_D"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque : Cette définition traduit le fait qu'un morphisme de cogèbres est l'adjoint d'un morphisme d'algèbres en dimension finie.

Théorème 16 (Bic 5.1.10.)**.** *Soient C et D deux K-cogèbres.*
Alors $C \otimes D$ est une K-cogèbre avec pour co-produit $\Delta_{C \otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C,D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ et pour co-unité $\varepsilon_{C \otimes D} = m_{\mathbb{C}} \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D)$.

2.1.3 Bigèbres, algèbres de Hopf et algèbres de Woronowicz

Lemme 8. *Soit B un K-espace vectoriel.*
On suppose que B est muni d'une structure de K-algèbre (B, m, η) et d'une structure de K-cogèbre (B, Δ, ε).
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) m et η sont des morphismes de K-cogèbre sur H.

(2) Δ et ε sont des morphismes de K-algèbre sur H.

Preuve :
On vérifie les axiomes de morphisme d'algèbres et de cogèbres pour m, η, Δ et ε.

- $\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ \Delta_{H\otimes H} = (m \otimes m) \circ (id_H \otimes \tau_{H,H} \otimes id_H) \circ (\Delta \otimes \Delta) = m_{H\otimes H} \circ (\Delta \otimes \Delta)$.
- $\varepsilon \circ m = \varepsilon_{H\otimes H} = m_{\mathbb{C}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$.
- $\varepsilon \circ \eta = \varepsilon_K = id_K = \eta_K$.
- $\Delta \circ \eta = (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_K = \eta_{H\otimes H}$.

Définition 18. *Une K-bigèbre est un quintuplet $B = (B, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ où (B, m, η) est une K-algèbre, (B, Δ, ε) est une K-cogèbre et où Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.*

Remarque : On pourrait croire que la dernière condition rompt la symétrie de la définition, mais en réalité il y a équivalence entre le fait que Δ et ε soient des morphismes de K-algèbres et le fait que m et η soient des morphismes de K-cogèbres (cf. lemme précédent).

Définition 19. *Une K-algèbre de Hopf est un sextuplet $H = (H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ où $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une K-bigèbre et $S : H \to H$ est une application K-linéaire, appelée l'antipode de H, telle que :*

$$m \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta,$$

i.e. telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes id"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "id\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 20. *Soient (A, m, η) une K-algèbre et (C, Δ, ε) une K-cogèbre.*
Pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(C, A)$, on note $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$.
$f * g \in \mathcal{L}(C, A)$ est appelé le produit de convolution de f et g.
Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "f\otimes g"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "f*g"'] & A
\end{tikzcd}$$

Théorème 17. *Soient (A, m, η) une K-algèbre et (C, Δ, ε) une K-cogèbre.*
Alors $\mathcal{L}(C, A)$ muni de $*$ a une structure de K-algèbre avec pour unité $\eta \circ \varepsilon$).

Preuve :

- $* : \mathcal{L}(C, A) \otimes \mathcal{L}(C, A) \to \mathcal{L}(C, A)$ et $\eta \circ \varepsilon$ sont des applications K-linéaires.
- Soit $(f, g, h) \in \mathcal{L}(C, A)^3$, alors :
  $*((* \otimes id)((f \otimes g) \otimes h)) = *((f * g) \otimes h) = (f * g) * h$.
  $*((id \otimes *)(f \otimes (g \otimes h))) = *(f \otimes (g * h)) = f * (g * h)$.
  Or $(f * g) * h = m \circ ((m \circ (f \otimes g) \circ \Delta) \otimes h) \circ \Delta = m \circ (m \otimes id) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes m) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta = m \circ (f \otimes (m \circ (g \otimes h) \circ \Delta)) \circ \Delta = f * (g * h)$.
  D'où $* \circ (* \otimes id) = * \circ (id \otimes *)$.

- Pour montrer que $\eta \circ \varepsilon$ est bien l'unité, il faudrait introduire les notations de Sweedler, ce que nous ne feront pas. Donc nous admettons ce résultat.

Remarques :

— Dans le cas où $C = H = A$, La structure d'algèbre donnée par la convolution est différente de celle donnée par la composition (cf. partie 2.2.5. page 32 pour un contre-exemple).

— Dans le cas d'une algèbre de Hopf $C = H = A$ et on remarque que l'antipode S est l'inverse de id_H pour la convolution.

Définition 21. *Une K-algèbre de Woronowicz est un quadruplet* (W, m, η, Δ) *où* (W, m, η) *est une* K*-algèbre et* $\Delta : W \to W \otimes W$ *est un morphisme d'algèbres vérifiant :*

$$\begin{cases} (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (W \otimes 1)\Delta(W) = (1 \otimes W)\Delta(W) = W \otimes W \end{cases}$$

2.1.4 Vers les groupes compacts

Définition 22. *Un groupe topologique est par définition un ensemble* G *muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que l'application* $\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$ *soit continue.*

Définition 23. *Un groupe compact est un groupe topologique dont l'espace topologique sous-jacent est compact.*

Remarque : Par la suite on mettra en lien les algèbres de Hopf ou de Woronowicz et les groupes compacts G via $\mathcal{C}(G)$ qui constituera un exemple d'algèbre de Hopf et d'algèbre de Woronowicz (cf. théorèmes 18 et 19).

2.2 Groupes finis

On s'intéresse tout d'abord aux groupes finis pour obtenir les résultats. On tentera par la suite d'étendre ces résultats aux groupes compacts infinis.

2.2.1 Du groupe à l'algèbre de Hopf

Lemme 9. *Soit X un ensemble fini.*
Alors X est compact.

Preuve :
$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$.
Il s'agit d'une réunion finie (car X est fini) d'ouverts pour la topologie discrète.
Donc X satisfait à la propriété de Borel-Lebesgue, i.e. X est compact.

Proposition 7. *Soit X un ensemble fini.*
Alors $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \cong \mathcal{C}(X \times X)$.

Preuve :
On pose $\varphi : \begin{array}{ccl} \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) & \to & \mathcal{C}(X \times X) \\ (f,g) & \mapsto & F_{f,g} : \begin{array}{ccc} X \times X & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)g(y) \end{array} \end{array}$.
Alors φ est une application bilinéaire. Donc, d'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\overline{\varphi} : \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X \times X)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathcal{C}(X \times X) \\ \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall (f,g) \in \mathcal{C}(X)^2, \overline{\varphi}(f \otimes g) = \varphi(f,g) = F_{f,g}$.

- Comme X est muni de la topologie discrète, $\mathcal{C}(X) = \mathbb{C}^X$.
  Comme X est un ensemble fini, $\mathcal{C}(X)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie $\#X$.
  Anisi, $\dim(\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X)) = (\dim(\mathcal{C}(X)))^2 = (\#X)^2 = \dim(\mathcal{C}(X \times X))$.
- Soit $(k,l) \in X^2$. Alors $\overline{\varphi}(\delta_k \otimes \delta_l) = \delta_{(k,l)}$.
  Donc $\overline{\varphi}$ transforme une base de $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X)$ en une base de $\mathcal{C}(X \times X)$.
  Donc $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme.

D'où $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \cong \mathcal{C}(X \times X)$.

Théorème 18. *Soit G un groupe fini.*
Alors $(\mathcal{C}(G), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf, avec :

$$m : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \\ f \otimes g & \mapsto & fg \end{array}, \qquad \eta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathcal{C}(G) \\ \lambda & \mapsto & \lambda.1 \end{array},$$

$$\Delta : \begin{array}{ccl} \mathcal{C}(G) & \mapsto & \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G \times G) \\ f & \mapsto & \begin{array}{ccc} G \times G & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(xy) \end{array} \end{array}, \qquad \varepsilon = \delta_e,$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x^{-1})) \end{array}.$$

Preuve :

- D'après la proposition 7, $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \cong \mathcal{C}(G \times G)$.
  Donc Δ et bien définie.
- Toutes ces applications sont bien $\mathbb{C}$-linéaires.
- Montrons que $m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$.
  Soit $(f, g, h) \in \mathcal{C}(G)^3$, alors :
  $(m \circ (m \otimes id))(f \otimes g \otimes h) = m((m \otimes id)(f \otimes g \otimes h)) = m((x \mapsto f(x)g(x)) \otimes h)$
  $= x \mapsto f(x)g(x)h(x) = m(f \otimes (x \mapsto g(x)h(x))) = m((id \otimes m)(f \otimes g \otimes h))$
  $= (m \circ (id \otimes m))(f \otimes g \otimes h)$.
  D'où $m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$.
- Montrons que $m \circ (\eta \otimes id) = id = m \circ (id \otimes \eta)$.
  Soit $f \in \mathcal{C}(G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :
  $(m \circ (\eta \otimes id))(\lambda \otimes f) = m((\eta \otimes id)(\lambda \otimes f)) = m(\eta(\lambda) \otimes f) = m((x \mapsto \lambda) \otimes f)$
  $= x \mapsto \lambda f(x) = id(f)$.
  D'où $m \circ (\eta \otimes id) = id$. De même pour l'autre égalité.
- Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(G)^2$. Alors $F_{f,g} \in \mathcal{C}(G \times G) \cong \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$.
  $F_{f,g}$ correspond donc au tenseur $f \otimes g$.
  Ainsi $\mathcal{C}(G \times G) \cong \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) = Vect(F_{f,g}, (f, g) \in \mathcal{C}(G)^2)$.
  Ainsi, $(\Delta \otimes id)(F_{f,g}) = (\Delta \otimes id)(f \otimes g) = \Delta(f) \otimes g = ((x, y, z) \mapsto f(xy)g(z))$
  $= ((x, y, z) \mapsto F_{f,g}(xy, z))$.
  Par linéarité, il vient :
  $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), (\Delta \otimes id)(F) = ((x, y, z) \mapsto F(xy, z))$.
  De même, on montre que $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), (id \otimes \Delta)(F) = ((x, y, z) \mapsto F(x, yz))$.
  Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, $\Delta(f) \in \mathcal{C}(G \times G)$ et on a :
  $(\Delta \otimes id)(\Delta(f)) = ((x, y, z) \mapsto \Delta(f)(xy, z)) = ((x, y, z) \mapsto f((xy)z))$
  $= ((x, y, z) \mapsto f(x(yz))) = ((x, y, z) \mapsto \Delta(f)(x, yz)) = (id \otimes \Delta)(\Delta(f))$.
  D'où $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$.
- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}(G)^2$, on a :
  $(\varepsilon \otimes id)(F_{f,g}) = (\varepsilon \otimes id)(f \otimes g) = \varepsilon(f) \otimes g = f(e) \otimes g = (x \mapsto f(e)g(x)) = (x \mapsto F_{f,g}(e, x))$.
  Par linéarité, on en déduit : $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), (\varepsilon \otimes id)(F) = (x \mapsto F(e, x))$.
  De même, on montre que $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), (id \otimes \varepsilon)(F) = (x \mapsto F(x, e))$.
  Ainsi $\forall f \in \mathcal{C}(G), (\varepsilon \otimes id)(\Delta(f)) = (x \mapsto \Delta(f)(e, x)) = (x \mapsto f(x)) = (x \mapsto \Delta(f)(x, e)) = (id \otimes \varepsilon)(\Delta(f))$.
  D'où $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$.
- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}(G)^2$, on a :
  $(m \circ (S \otimes id))(F_{f,g}) = m((S \otimes id)(f \otimes g)) = m(S(f) \otimes g) = (x \mapsto f(x^{-1})g(x))$
  $= (x \mapsto F_{f,g}(x^{-1}, x))$.
  Ainsi, par linéarité, $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), m((S \otimes id)(F)) = (x \mapsto F(x^{-1}, x))$.
  De même, on montre que $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), m((id \otimes S)(F)) = (x \mapsto F(x, x^{-1}))$.
  Ainsi, $\forall f \in \mathcal{C}(G), m((S \otimes id)(\Delta(f))) = (x \mapsto \Delta(f)(x^{-1}, x)) = (x \mapsto f(x^{-1}x))$
  $= (x \mapsto f(e)) = (x \mapsto f(xx^{-1})) = (x \mapsto \Delta(f)(x, x^{-1})) = m((id \otimes S)(\Delta(f)))$.
  De plus, $\forall f \in \mathcal{C}(G), (\eta \circ \varepsilon)(f) = \eta(f(e)) = (x \mapsto f(e))$.
  D'où $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$.
- Montrons que Δ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$, i.e. montrons que :
  $$\begin{cases} \Delta \circ m = m_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)} \circ (\Delta \otimes \Delta) \\ \Delta \circ \eta = \eta_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)} \end{cases}.$$
  On note $m_{bis} = m_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)}$ et $\eta_{bis} = \eta_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)}$.

* $\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G) \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta} (\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G))\otimes(\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)) \xrightarrow{m_{bis}} \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$ et,
  $\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(G) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$.
  Les deux applications ont bien les mêmes ensembles de départ et d'arrivée.
  Soit $f\otimes g \in \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$, alors :
  $\cdot\Delta(m(f\otimes g)) = \Delta(x\mapsto f(x)g(x)) = ((x,y)\mapsto f(xy)g(xy))$.
  $\cdot m_{bis}((\Delta\otimes\Delta)(f\otimes g)) = m_{bis}(\Delta(f)\otimes\Delta(g))$
  $= m_{bis}(((x,y)\mapsto f(xy))\otimes((x,y)\mapsto g(xy))) = ((x,y)\mapsto f(xy)g(xy))$.
  D'où $\Delta\circ m = m_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)}\circ(\Delta\otimes\Delta)$.
* $\mathbb{C} \xrightarrow{\eta_{bis}} \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$ et,
  $\mathbb{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}(G) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$.
  Les deux applications ont bien les mêmes ensembles de départ et d'arrivée.
  Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, alors :
  $\cdot\Delta(\eta(\lambda)) = \Delta(x\mapsto\lambda) = ((x,y)\mapsto\lambda)$.
  $\cdot\eta_{bis}(\lambda) = ((x,y)\mapsto\lambda)$.
  D'où $\Delta\circ\eta = \eta_{\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)}$.

- Montrons que ε est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathbb{C}$, i.e. montrons que :

$$\begin{cases} \varepsilon\circ m = m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon) \\ \varepsilon\circ\eta = \eta_{\mathbb{C}} \end{cases}.$$

  Remarquons que $m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}$ est la multiplication usuelle $\times$ sur $\mathbb{C}$ et que $\eta_{\mathbb{C}}$ est juste $id_{\mathbb{C}}$.
  * $\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G) \xrightarrow{\varepsilon\otimes\varepsilon} \mathbb{C}\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\times} \mathbb{C}$ et,
    $\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}$.
    Les deux applications ont bien les mêmes ensembles de départ et d'arrivée.
    Soit $f\otimes g\in\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$, alors :
    $\cdot\varepsilon(m(f\otimes g)) = \varepsilon(x\mapsto f(x)g(x)) = f(e)g(e)$.
    $\cdot m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}((\varepsilon\otimes\varepsilon)(f\otimes g)) = m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}(\varepsilon(f)\otimes\varepsilon(g)) = m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}(f(e)\otimes g(e)) = f(e)g(e)$.
    D'où $\varepsilon\circ m = m_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}}\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)$.
  * $\mathbb{C} \xrightarrow{id_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}$ et,
    $\mathbb{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}$.
    Les deux applications ont bien les mêmes ensembles de départ et d'arrivée.
    Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, alors :
    $\cdot id_{\mathbb{C}}(\lambda) = \lambda$.
    $\cdot\varepsilon(\eta(\lambda)) = \varepsilon(x\mapsto\lambda) = \lambda$.
    D'où $\varepsilon\circ\eta = \eta_{\mathbb{C}}$.

D'où $\mathcal{C}(G)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Hopf.

2.2.2 Du groupe à l'algèbre de Woronowicz

Théorème 19. *Soit G un groupe fini.*
Alors $(\mathcal{C}(G), m, \eta, \Delta)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Woronowicz avec les m, η et Δ du théorème précédent.

Preuve :
D'après la preuve du théorème précédent, $(\mathcal{C}(G), m, \eta)$ est bien une $\mathbb{C}$-algèbre, on a l'axiome de co-associativité de Δ qui est de plus un morphisme d'algèbres. Il reste juste à montrer l'égalité sur les ensembles. Cela se fait en remarquant que $(\mathcal{C}(G)\otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(G)) \subset \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$ et que $((\delta_h\otimes 1)\Delta(\delta_g))_{(g,h)\in G^2}$ est une famille libre de $(\#G)^2 = \dim(\mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G))$ vecteurs de $(\mathcal{C}(G)\otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(G))$.
D'où $(\mathcal{C}(G)\otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(G)) = \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$.
De même, $(1\otimes\mathcal{C}(G))\Delta(\mathcal{C}(G)) = \mathcal{C}(G)\otimes\mathcal{C}(G)$.

2.2.3 De l'algèbre de Hopf au groupe

On vient donc de voir que tout groupe fini G induit sur $\mathcal{C}(G)$ une structure d'algèbre de Hopf. Dans la suite nous verrons la réciproque, à savoir que pour tout ensemble fini X, une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{C}(X)$ implique que X est muni d'une structure de groupe compatible.

Théorème 20. *Soit X un ensemble fini.*
On suppose que $\mathcal{C}(X)$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf $(\mathcal{C}(X), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$.
Alors X est un groupe compact.

Preuve :
Pour tout $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{C}(X)^*)^2$, on note $\varphi \star \psi = m_{\mathbb{C}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta$. $\star$ est aussi appelée convolution. On va chercher à définir une loi de groupe $\cdot$ sur X à partir de $\star$ et des applications δ_x pour $x \in X$ en utilisant le fait que $\Omega : x \mapsto \delta_x$ est un homéomorphisme.

- Soit $(x, y) \in X^2$. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(X)^2$, alors :
  $m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(F_{f,g})) = m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(f \otimes g)) = m_{\mathbb{C}}(\delta_x(f) \otimes \delta_y(g)) = m_{\mathbb{C}}(f(x) \otimes g(y)) = f(x)g(y) = F_{f,g}(x, y)$.
  Par linéarité, on en déduit que $\forall F \in \mathcal{C}(X \times X), m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(F)) = F(x, y)$.
  Ainsi, $\forall f \in \mathcal{C}(X), \delta_x \star \delta_y(f) = \Delta(f)(x, y)$.
  Comme Δ est un morphisme d'algèbres, on a : $\forall (f, g) \in \mathcal{C}(X)^2, \Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g)$.
  Ainsi $\delta_x \star \delta_y \in \mathcal{C}(X)^*$ et $\forall (f, g) \in \mathcal{C}(X)^2, \delta_x \star \delta_y(fg) = \Delta(fg)(x, y) = (\Delta(f)\Delta(g))(x, y) = \Delta(f)(x, y)\Delta(g)(x, y) = (\delta_x \star \delta_y(f))(\delta_x \star \delta_y(g))$.
  Donc, par le lemme 7, il existe $z \in X$ tel que $\delta_x \star \delta_y = \delta_z$.
  On note $z = x \cdot y$ et l'application $\cdot$ ainsi construite est bien définie car Ω est un homéomorphisme.
  Il s'agit d'une loi interne sur X.
- L'associativité de la convolution $\star$ se démontre comme l'associativité de la convolution $*$, qui repose sur l'axiome de co-associativité de Δ.
  Soit $(x, y, z) \in X^3$, alors :
  $\delta_{(x \cdot y) \cdot z} = \delta_{x \cdot y} \star \delta_z = (\delta_x \star \delta_y) \star \delta_z = \delta_x \star (\delta_y \star \delta_z) = \delta_x \star \delta_{y \cdot z} = \delta_{x \cdot (y \cdot z)}$.
  D'où $\forall (x, y, z) \in X^3, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, i.e. la loi $\cdot$ est associative.
- Pour trouver l'élément neutre du groupe, on résonne sur l'élément neutre pour $\star$, à savoir $i := \eta_{\mathbb{C}} \circ \varepsilon$, où $\eta_{\mathbb{C}} = id_{\mathbb{C}}$.
  Comme ε est un morphisme d'algèbres, $\forall (f, g) \in \mathcal{C}(X)^2, i(fg) = i(f)i(g)$.
  De plus $i \in \mathcal{C}(X)^*$, donc par le lemme 7, il existe $e \in X$ tel que $i = \delta_e$.
  Alors, $\forall x \in X, \delta_{x \cdot e} = \delta_x \star \delta_e = \delta_x \star i = \delta_x$.
  D'où $\forall x \in X, x \cdot e = x$, i.e. e est élément neutre pour la loi $\cdot$.
- Soit $x \in X$. Pour trouver l'inverse de x pour la loi $\cdot$, on raisonne sur l'antipode.
  On a l'intuition que l'inverse de δ_x pour la loi $\star$ est $\delta_x \circ S$.
  $$\delta_x \star (\delta_x \circ S) = m_{\mathbb{C}} \circ (\delta_x \otimes (\delta_x \circ S)) \circ \Delta = \underbrace{m_{\mathbb{C}} \circ (\delta_x \otimes \delta_x)}_{=\delta_x \circ m} \circ (id_{\mathcal{C}(X)} \otimes S) \circ \Delta$$
  $$= \delta_x \circ \underbrace{m \circ (id_{\mathcal{C}(X)} \otimes S) \circ \Delta}_{=\eta \circ \varepsilon} = \underbrace{\delta_x \circ \eta}_{=\eta_{\mathbb{C}}} \circ \varepsilon = \eta_{\mathbb{C}} \circ \varepsilon = i.$$
  De plus $\delta_x \circ S \in \mathcal{C}(X)^*$, donc par le lemme 7, il existe $x^{-1} \in X$ tel que $\delta_x \circ S = \delta_{x^{-1}}$.
  Alors $\delta_{x \cdot x^{-1}} = \delta_x \star \delta_{x^{-1}} = i = \delta_e$.
  D'où $x \cdot x^{-1} = e$, i.e. l'inverse de x pour la loi $\cdot$ est x^{-1}.
  D'où X est un groupe fini (donc compact).

Remarque : La continuité de l'application $\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$ vient du fait que $X \times X$ est muni de la topologie discrète (car il est fini puisque X est fini).

2.2.4 De l'algèbre de Woronowicz au groupe

Lemme 10. *Soit $(M,\star)$ un magma fini associatif bi-simplifiable, i.e. tel que :*

$$\forall(a,b,c)\in M^3,\begin{cases} a\star b=a\star c & \Rightarrow & b=c \\ b\star a=c\star a & \Rightarrow & b=c \end{cases}.$$

Alors M est un groupe.

Preuve :

- Soit $a\in M$. On considère l'application $\phi_a:\begin{array}{ccc} M & \to & M \\ x & \mapsto & a\star x \end{array}$.
  Soit $(x_1,x_2)\in M^2$ tel que $\phi_a(x_1)=\phi_a(x_2)$, i.e. $a\star x_1=a\star x_2$.
  Alors par simplifiabilité à gauche, il vient : $x_1=x_2$.
  D'où ϕ_a est injective, et comme M est fini, ϕ_a est bijective.
- Soit $a\in M$. Comme ϕ_a est bijective, on a : $\forall a\in M,\exists! e_a\in M, a\star e_a=a$.
  De même, $\forall a\in M,\exists! e'_a\in M, e'_a\star a=a$.
- Soit $(a,b)\in M^2$, alors :
  $a\star b\star e_{a\star b}=a\star b=a\star b\star e_b$.
  D'où par simplifiabilité à gauche, il vient : $e_b=e_{a\star b}$.
  Comme $\tilde{\phi}_b:\begin{array}{ccc} M & \to & M \\ x & \mapsto & x\star b \end{array}$ est bijective et que $a\in M$, il existe $x\in M$ tel que
  $a=\tilde{\phi}_b(x)=x\star b$.
  Ainsi, $e_a=e_{x\star b}=e_b$.
  D'où $\exists! e\in M,\forall a\in M, a\star e=a$.
  De même, $\exists! e'\in M,\forall a\in M, e'\star a=a$.
- Soit $a\in M$, alors :
  $e\star e'\star a=e\star a$.
  Par simplifiabilité droite, il vient : $e\star e'=e=e\star e$.
  Par simplifiabilité gauche, il vient : $e'=e$.
  D'où $\exists! e\in M,\forall a\in M, e\star a=a=a\star e$, i.e. M est unifère d'élément neutre e.
- On suppose par l'absurde qu'il existe un élément $a\in M$ non-symétrisable à droite (la cas à gauche se traite de la même manière) : $\forall b\in M, a\star b\neq e$.
  Or $e\notin\phi_a(M)=M$. Contradiction.
  Donc tout élément est symétrisable à gauche et à droite.
- Soit $a\in M$. On note a_g (resp. a_d) son symétrique à gauche (resp. à droite), alors :
  $a_g=a_g\star\underbrace{a\star a_d}_{=e}=\underbrace{a_g\star a}_{=e}\star a_d=a_d$.

D'où M est un groupe.

Théorème 21. *Soit X un ensemble fini.*
On suppose que $\mathcal{C}(X)$ est muni d'une structure d'algèbre de Woronowicz $(\mathcal{C}(X),\Delta)$.
Alors X est un groupe compact.

Preuve :
On adapte la preuve du théorème 20.

- On définit la loi de groupe $\cdot$ sur X de la même manière en utilisant l'axiome d'associativité de Δ. On obtient ainsi une loi de composition interne associative sur X.
- Utilisons le second axiome pour montrer la bi-simplifiabilité du magma $(X,\cdot)$.

* Soit $(x, y, z) \in X^3$ tel que $x \cdot y = x \cdot z$.
  Soit $(f, g) \in \mathcal{C}(X)^2$. On pose $F_{f,g} = (g \otimes 1)\Delta(f) \in (\mathcal{C}(X) \otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(X))$, alors :
  $F_{f,g}(x, y) = f(x \cdot y)g(x) = f(x \cdot z)g(x) = F_{f,g}(x, z)$.
  Par linéarité, on a : $\forall F \in \mathcal{C}(X \times X) \cong \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X), F(x, y) = F(x, z)$.
  Ainsi, $\forall g \in \mathcal{C}(X), 1 \otimes g(y) = (1 \otimes g)(x \otimes y) = (1 \otimes g)(x \otimes z) = 1 \otimes g(z)$.
  Donc $\forall g \in \mathcal{C}(X), g(y) = g(z)$.
  Comme $\mathcal{C}(X)$ sépare les points, il vient : $y = z$.
  D'où X est simplifiable à gauche.
* En utilisant cette fois le fait que $(1 \otimes \mathcal{C}(X))\Delta(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \cong \mathcal{C}(X \times X)$, on montre que X est simplifiable à droite.

Enfin, en invoquant le lemme précédent, il vient que X est groupe.

2.2.5 Dual de $\mathcal{C}(G)$

Théorème 22. *Soit G un groupe fini.*
Alors le dual de $(\mathcal{C}(G), m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est la bigèbre $(M(G), \Delta^*, \varepsilon^*, m^*, \eta^*)$ des mesures sur G.

Preuve :

- D'après le théorème 18, $\mathcal{C}(G)$ est un algèbre de Hopf de dimension finie (donc une $\mathbb{C}$-algèbre et une $\mathbb{C}$-cogèbre).
  Donc, d'après les théorèmes 14 et 15, $\mathcal{C}(G)^*$ est aussi une $\mathbb{C}$-algèbre et une $\mathbb{C}$-cogèbre.
  On a : $\mathcal{C}(G)^* = M(G)$.
- Explicitons le produit de $M(G)$.
  Pour cela, il nous faut prendre l'adjoint du co-produit sur $\mathcal{C}(G)$, à savoir :

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) \\ & f & \mapsto & ((x, y) \mapsto f(xy)) \end{array}.$$

  On a :

$$\begin{array}{rccl} \Delta^* : & M(G) \otimes M(G) & \to & M(G) \\ & \mu \otimes \nu & \mapsto & (\mu \otimes \nu) \circ \Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{G \times G} f(xy)d\mu(x)d\nu(y) \end{array} \end{array}.$$

  En particulier, pour $A \in \mathcal{B}(G)$ et $f = \mathbf{1}_A$:

$$\int_{G \times G} f(xy)d\mu(x)d\nu(y) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_G \mu(Ay^{-1})d\nu(y) = \mu * \nu(A).$$

  Donc le produit naturel sur $M(G)$ est la convolution des mesures.
- Explicitons le co-produit de $M(G)$.
  Pour cela, il nous faut prendre l'adjoint du produit sur $\mathcal{C}(G)$, à savoir :

$$\begin{array}{rccl} m : & \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \\ & f \otimes g & \mapsto & fg \end{array}.$$

  On a :

$$\begin{array}{rccl} m^* : & M(G) & \to & M(G) \otimes M(G) \\ & \mu & \mapsto & \mu \circ m : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G) & \to & \mathbb{C} \\ f \otimes g & \mapsto & \displaystyle\int_G fg d\mu \end{array} \end{array}.$$

En particulier, pour $k \in G$ et $\delta_k \in M(G)$:

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}(G)^2, m^*(\delta_k)(f \otimes g) = \delta_k(m(f \otimes g)) = f(k)g(k) = (\delta_k \otimes \delta_k)(f \otimes g).$$

Donc le co-produit naturel sur $M(G)$ est l'application qui envoie une mesure sur la mesure sur la diagonale (licite car d'après le théorème de Fubini, $M(G) \otimes M(G) \subset M(G \times G)$).

- Explicitons l'unité de $M(G)$. On note e l'élément neutre de G.
  Pour cela, il nous faut prendre l'adjoint de la co-unité sur $\mathcal{C}(G)$, à savoir :

$$\varepsilon = \delta_e.$$

  On a :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon^* : & \mathbb{C} & \to & M(G) \\ & \lambda & \mapsto & \lambda\delta_e \end{array} .$$

- Explicitons la co-unité de $M(G)$.
  Pour cela, il nous faut prendre l'adjoint de l'unité de $\mathcal{C}(G)$, à savoir :

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathbb{C} & \to & \mathcal{C}(G) \\ & \lambda & \mapsto & \lambda.1 \end{array} .$$

  On a :

$$\begin{array}{rccc} \eta^* : & M(G) & \to & \mathbb{C} \\ & \mu & \mapsto & \mu(1) \end{array} .$$

- On vérifie que l'on a bien des morphismes d'algèbres ou de cogèbres.

Contre-exemple : La convolution est différente de la composition sur l'algèbre de Hopf $\mathcal{C}(G)$.
Une base de $\mathcal{L}(\mathcal{C}(G))$ est $(e_{g,h})_{(g,h)\in G^2}$ où $e_{g,h} : \begin{array}{ccc} \delta_h & \mapsto & \delta_g \\ \underset{x\neq h}{\delta_x} & \mapsto & 0 \end{array}$.

Soit $(g,h,g',h',\alpha,\beta) \in G^6$, alors :

- $e_{g,h}.e_{g',h'} = \delta_{h,g'}e_{g,h'}$ (composition).
- $e_{g,h} * e_{g',h'}(\delta_\alpha) = m((e_{g,h} \otimes e_{g',h'})(\Delta(\delta_\alpha)))$.
  On pose $F_{\alpha,\beta} = F_{\delta_\alpha,\delta_\beta} = \delta_\alpha \otimes \delta_\beta$, alors :
  $m((e_{g,h} \otimes e_{g',h'})(\delta_\alpha \otimes \delta_\beta)) = \delta_{\alpha,h}\delta_{\beta,h'}\delta_g\delta_{g'} = F_{\alpha,\beta}(h,h')\delta_g\delta_{g'}$.
  Par linéarité, il vient : $\forall F \in \mathcal{C}(G \times G), m((e_{g,h} \otimes e_{g',h'})(F)) = F(h,h')\delta_g\delta_{g'}$.
  Ainsi, $e_{g,h} * e_{g',h'}(\delta_\alpha) = \Delta(\delta_\alpha)(h,h')\delta_g\delta_{g'} = \delta_{\alpha,h\cdot h'}\delta_g\delta_{g'}$.
  D'où $e_{g,h} * e_{g',h'} = \delta_{g,g'}e_{g,h\cdot h'}$ (convolution).

Les deux formules sont différentes, i.e. la convolution et la composition ne coïncident pas.

2.3 Groupes compacts infinis

Les problèmes qui surviennent lorsque l'espace compact K avec lequel on travaille devient un ensemble infini sont celui de la continuité des opérateurs considérés et celui du produit tensoriel algébrique $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K)$, qui n'est plus isomorphe à $\mathcal{C}(K \times K)$. Il va donc falloir d'une part supposer que les applications sont continues et d'autre part introduire le produit tensoriel topologique.

On s'appuiera sur les résultats obtenus sur les groupes finis et on utilisera le lemme suivant pour conclure :

Lemme 11. *Soit K un espace topologique compact.*
Alors $\overline{\varphi} : \mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K \times K)$ est une application linéaire injective, d'image dense dans $\mathcal{C}(K \times K)$.

Preuve :

- L'existence et la linéarité de $\overline{\varphi}$ ont déjà été démontrées dans la preuve de la proposition 7.
- La preuve de l'injectivité de $\overline{\varphi}$ est identique à celle de la proposition 6.
- Pour montrer la densité de l'image de $\overline{\varphi}$, on utilise le théorème de Stone-Weierstrass. $Im(\overline{\varphi}) = \{F_{f,g}/(f,g) \in \mathcal{C}(K)^2\}$.
  - ✻ $K \times K$ est compact (comme produit de deux compacts).
  - ✻ Soit $F_{f,g} \in Im(\overline{\varphi})$. Alors $\overline{F_{f,g}} = F_{\overline{f},\overline{g}} \in Im(\overline{\varphi})$.
  - ✻ Soit $(x, y) \in K \times K$.
    Comme $\mathcal{C}(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$, il existe $(f_x, f_y) \in \mathcal{C}(K)^2$ tel que $f_x(x) \neq 0$ et $f_y(y) \neq 0$.
    Alors $F_{f_x,f_y} \in Im(\overline{\varphi})$ et $F_{f_x,f_y}(x, y) = f_x(x)f_y(y) \neq 0$ (par intégrité du corps $\mathbb{C}$).
  - ✻ Soit $(x, y) \in K \times K$. Soit $(x', y') \in K \times K$. On suppose $(x, y) \neq (x', y')$.
    Alors $x \neq x'$ ou ($x = x'$ et $y \neq y'$).
    · On suppose $x = x'$ et $y \neq y'$. Comme K est compact, d'après le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}(K)$ telle que $f(y) = 0 \neq 1 = f(y')$.
    Alors $F_{f_x,f} \in Im(\overline{\varphi})$ et $F_{f_x,f}(x, y) = f_x(x)f(y) = 0 \neq f_x(x') = f_x(x')f(y') = F_{f_x,f}(x', y')$.
    · On suppose $x \neq x'$. On suppose $y \neq y'$ (sinon on se ramène au cas précédent en échangeant les rôles de x et de y).
    Comme K est compact, d'après le lemme d'Urysohn, il existe $(f, g) \in \mathcal{C}(K)^2$ tel que : $f(x) = g(y) = 0 \neq 1 = g(y') = f(x')$.
    Alors $F_{f,g} \in Im(\overline{\varphi})$ et $F_{f,g}(x, y) = f(x)g(y) = 0 \neq 1 = f(x')g(y') = F_{f,g}(x', y')$.

D'où, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, $Im(\overline{\varphi})$ est dense dans $\mathcal{C}(K \times K)$.

Remarque : On note $\mathcal{C}(K)\overline{\otimes}\mathcal{C}(K)$ la fermeture de $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K)$ dans $\mathcal{C}(K \times K)$ pour la norme $||.||_\infty$. On l'appelle produit tensoriel topologique. Alors d'après le théorème précédent $\mathcal{C}(K)\overline{\otimes}\mathcal{C}(K) \cong \mathcal{C}(K \times K)$.

2.3.1 Du groupe à la C^*-algèbre de Hopf

Lemme 12. *Soit X, Y et K trois espaces topologiques compacts non-vides.*
Soit $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ un opérateur.
Alors $T \otimes id : \mathcal{C}(X \times K) \to \mathcal{C}(Y \times K)$ est un opérateur.
De plus, $||T \otimes id||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X\times K),\mathcal{C}(Y\times K))} = ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}$.

Preuve :

- Comme T est continu, $\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X, |(T(f))(x)| \leqslant ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}||f||_\infty$.
- ∗ $T \otimes id$ est linéaire.

  ∗ Soit $F \in \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(K)$.

  On note $F = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f_i \in \mathcal{C}(X)$ et $g_i \in \mathcal{C}(K)$, alors :

  $||(T \otimes id)(F)||_\infty = ||\sum_{i=1}^{n} T(f_i) \otimes g_i||_\infty = \sup_{(y,k)\in Y\times K} |\sum_{i=1}^{n}(T(f_i))(y)g_i(k)|$

  $= \sup_{k\in K} \sup_{y\in Y} |T(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_i(k)f_i}_{\text{noté } \varphi_k\in\mathcal{C}(X)})(y)| \leqslant ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))} \sup_{k\in K} ||\varphi_k||_\infty$

  $= ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))} \sup_{(x,k)\in X\times K} |\sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(k)| = ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}||F||_\infty$.

  D'où $T \otimes id$ est continu sur $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(K)$.

  ∗ Comme $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(X)\overline{\otimes}\mathcal{C}(K) \cong \mathcal{C}(X \times K)$, il vient : $T \otimes id$ est continue sur $\mathcal{C}(X \times K)$ et $||T \otimes id||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X\times K),\mathcal{C}(Y\times K))} \leqslant ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}$ (via prolongement linéaire).

  ∗ De plus, pour $f \in \mathcal{C}(X)$, on a :

  $||T(f)||_{\mathcal{C}(Y)} = ||T(f) \otimes 1||_{\mathcal{C}(Y)\otimes\mathcal{C}(K)} = ||(T \otimes id)(f \otimes 1)||_{\mathcal{C}(Y)\otimes\mathcal{C}(K)}$

  $\leqslant ||T \otimes id||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X)\otimes\mathcal{C}(K))}||f \otimes 1||_{\mathcal{C}(X)\otimes\mathcal{C}(K)}$.

  Donc $||T \otimes id||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X\times K),\mathcal{C}(Y\times K)} \geqslant ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}$ (via prolongement linéaire).

D'où $T \otimes id : \mathcal{C}(X \times K) \to \mathcal{C}(Y \times K)$ est un opérateur avec :

$$||T \otimes id||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X\times K),\mathcal{C}(Y\times K))} = ||T||_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}(X),\mathcal{C}(Y))}.$$

Définition 24. *On appelle C^*-algèbre de Hopf commutative toute algèbre $(\mathcal{C}(K), m, \eta)$ avec K compact, munie d'applications linéaires continues $\Delta : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K \times K)$, $\varepsilon : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C}$ et $S : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ telles que :*

- $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$.
- $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$.
- $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$.

Remarque : Les applications $\Delta\otimes id$, $id\otimes\Delta$, $\varepsilon\otimes id$, $id\otimes\varepsilon$, $S\otimes id$ et $id\otimes S$ sont automatiquement continues et définies sur $\mathcal{C}(K)\otimes\mathcal{C}(K)$ et s'étendent par densité à $\mathcal{C}(K\times K)$ (cf. lemme précédent).

Théorème 23. *Soit G un groupe compact (infini).*
Alors $(\mathcal{C}(G), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une C^*-algèbre de Hopf commutative, avec les m, η, Δ, ε et S du théorème 18.

Preuve :
On adapte la preuve du théorème 18.
On reprend les mêmes applications m, η, Δ, ε et S, avec cette fois Δ à valeurs dans le produit tensoriel topologique.

- La preuve du fait que $\mathcal{C}(G)$ soit une algèbre est identique.
- $\forall f \in \mathcal{C}(G), ||\Delta(f)||_\infty = \sup_{(x,y)\in G^2} |f(xy)| \leqslant ||f||_\infty$. D'où Δ est continue.
- $\forall f \in \mathcal{C}(G), |\varepsilon(f)| = |f(e)| \leqslant ||f||_\infty$. D'où ε est continue.

- $\forall f \in \mathcal{C}(G), ||S(f)||_\infty = \sup_{x\in G} |f(x^{-1})| \leqslant ||f||_\infty$. D'où S est continue.
- La vérification des formules des axiomes algébriques en découle par densité et est identique à celle effectuée dans la preuve du théorème 18.

2.3.2 Du groupe à la C^*-algèbre de Woronowicz

Définition 25. *On appelle C^*-algèbre de Woronowicz commutative toute algèbre $(\mathcal{C}(K), m, \eta)$ avec K compact, munie d'une application linéaire continue $\Delta : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)\overline{\otimes}\mathcal{C}(K)$ telles que :*

$$\begin{cases} \forall (f,g) \in \mathcal{C}(K)^2, \Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g) \\ (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\mathcal{C}(K) \otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(K)) \text{ et } (1 \otimes \mathcal{C}(K))\Delta(\mathcal{C}(K)) \text{ sont denses dans } \mathcal{C}(K \times K) \end{cases}.$$

Théorème 24. *Soit G un groupe compact (infini).*
Alors $(\mathcal{C}(G), m, \eta, \Delta)$ est un C^*-algèbre de Woronowicz commutative, avec les m, η et Δ du théorème 18.

Preuve :
D'après les preuves des théorèmes précédents, il reste juste à montrer la propriété de densité. Cela se fait avec le théorème de Stone-Weierstrass.

- $(1 \otimes \mathcal{C}(G))\Delta(\mathcal{C}(G))$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(G \times G) \cong \mathcal{C}(G)\overline{\otimes}\mathcal{C}(G)$.
  Elle contient donc les constantes.
- Soient (x,y) et $(x',y') \in G \times G$ tels que $(x,y) \neq (x',y')$.
  On suppose $y \neq y'$, alors il existe $g \in \mathcal{C}(G)$ (qui sépare les points) telle que $g(y) \neq g(y')$.
  Alors $(1 \otimes g)\Delta(1) \in (1 \otimes \mathcal{C}(G))\Delta(\mathcal{C}(G))$ et on a :
  $((1 \otimes g)\Delta(1))(x,y) = 1 \otimes g(y) \neq 1 \otimes g(y') = ((1 \otimes g)\Delta(1))(x',y')$.
  On suppose $y = y'$ et $x \neq x'$. On a $x \cdot y \neq x' \cdot y$ donc il existe $f \in \mathcal{C}(G)$ telle que $\Delta(f)(x,y) = f(x \cdot y) \neq f(x' \cdot y) = \Delta(f)(x',y)$.
  Et $\Delta(f) = (1 \otimes 1)\Delta(f) \in (1 \otimes \mathcal{C}(G))\Delta(\mathcal{C}(G))$.

D'où, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, $(1 \otimes \mathcal{C}(G))\Delta(\mathcal{C}(G))$ est dense dans $\mathcal{C}(G \times G)$.
De même, on montre que $(\mathcal{C}(G) \otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(G))$ est dense dans $\mathcal{C}(G \times G)$.

2.3.3 De la C^*-algèbre de Hopf au groupe

Théorème 25. *Soit K un espace topologique compact (infini).*
On suppose que $\mathcal{C}(K)$ est muni d'une structure de C^*-algèbre de Hopf commutative $(\mathcal{C}(K), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$.
Alors K est un groupe compact.

Preuve :
On adapte la preuve du théorème 20. Soit $(x,y) \in K^2$.
On sait déjà par linéarité que $\forall F \in \mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K), m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(F)) = F(x,y)$.
Et $\forall F \in \mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K), |m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(F))| = |F(x,y)| \leqslant ||F||_\infty$.
D'où $m_{\mathbb{C}} \circ (\delta_x \otimes \delta_y)$ est continue sur $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K)$.
Comme $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(K)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)\overline{\otimes}\mathcal{C}(K) \cong \mathcal{C}(K \times K)$, il vient :
$\forall F \in \mathcal{C}(K \times K), m_{\mathbb{C}}((\delta_x \otimes \delta_y)(F)) = F(x,y)$.
Le reste de la preuve est identique à celle du théorème 20, à ceci près que la continuité des applications nécessaires pour pouvoir appliquer le lemme 7 résulte de la continuité des applications Δ, ε et S, et non de la continuité automatique donnée par la dimension finie de l'algèbre $\mathcal{C}(K)$.
Il reste à montrer que la structure de groupe et la structure topologique sont compatibles.

- On note $\psi : \begin{array}{rcl} K \times K & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$.
  Comme Ω est un homéomorphisme, la continuité de ψ équivaut à la continuité de $\Omega \circ \psi$.
  Soit $(z_1, z_2) \in K \times K$. Soit $r > 0$. On considère $B_f(\Omega \circ \psi(z_1, z_2), r)$ ouvert de $\mathcal{C}(K)^*$ pour la topologie faible* (on se restreint à une boule car intersection finie et image réciproque commutent).
  D'après ce qui précède, $\forall (x,y) \in K \times K, \forall f \in \mathcal{C}(K), (\delta_x \star \delta_y)(f) = \Delta(f)(x,y)$.
  Or $\Delta(f) \in \mathcal{C}(K \times K)$.
  Donc il existe $V \in \mathcal{V}_{K\times K}(z_1, z_2)$ tel que $\forall (x,y) \in V, |\Delta(f)(z_1,z_2) - \Delta(f)(x,y)| < r$.
  Alors $\forall (x,y) \in V, |((\Omega \circ \psi)(z_1, z_2))(f) - ((\Omega \circ \psi)(x,y))(f)| = |\delta_{z_1 \cdot z_2}(f) - \delta_{x \cdot y}(f)|$
  $= |(\delta_{z_1} \star \delta_{z_2})(f) - (\delta_x \star \delta_y)(f)| = |\Delta(f)(z_1, z_2) - \Delta(f)(x,y)| < r$.
  D'où $\Omega \circ \psi$ est continue. D'où ψ est continue.
- On note $\sigma : \begin{array}{rcl} K & \to & K \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$.
  Comme Ω est un homéomorphisme, la continuité de σ équivaut à la continuité de $\Omega \circ \sigma$.
  Soit $z \in K$. Soit $r > 0$. On considère $B_f(\Omega \circ \sigma(z), r)$ ouvert de $\mathcal{C}(K)^*$ pour la topologie faible* (on se restreint à une boule car intersection finie et image réciproque commutent).
  D'après ce qui précède, $\forall x \in K, \delta_{x^{-1}} = \delta_x \circ S$.
  Or $S(f) \in \mathcal{C}(K)$.
  Donc il existe $W \in \mathcal{V}_K(z)$ tel que $\forall x \in W, |\delta_{z^{-1}}(f) - \delta_{x^{-1}}(f)| = |(\delta_z \circ S)(f) - (\delta_x \circ S)(f)| = |S(f)(z) - S(f)(x)| < r$.
  Alors $\forall x \in W, |((\Omega \circ \sigma)(z))(f) - ((\Omega \circ \sigma)(x))(f)| = |\delta_{z^{-1}}(f) - \delta_{x^{-1}}(f)| < r$.
  D'où $\Omega \circ \sigma$ est continue. D'où σ est continue.

D'où K est un groupe compact.

2.3.4 De la C^*-algèbre de Woronowicz au groupe

Théorème 26. *Soit K un espace topologique compact (infini).*
On suppose que $\mathcal{C}(K)$ est muni d'une structure de C^*-algèbre de Woronowicz commutative, $(\mathcal{C}(K), \Delta)$.
Alors K est un groupe compact.

Preuve :

- On reprenant la même construction que dans la preuve du théorème 20 (i.e. en utilisant l'axiome de co-associativité de Δ), on définit une loi interne associative $\cdot$ sur K.
- Utilisons le second axiome pour montrer la bi-simplifiabilité.
  Soit $(x,y,z) \in K^3$. On suppose $x \cdot y = x \cdot z$.
  De même qu'à la preuve du théorème 21, on a par linéarité :

$$\forall F \in (\mathcal{C}(K) \otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(K)), F(x,y) = F(x,z).$$

  On considère l'application $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(K \times K) & \to & \mathbb{C} \\ F & \mapsto & F(x,y) - F(x,z) = \delta_{(x,y)}(F) - \delta_{(x,z)}(F) \end{array}$.
  Φ est alors continue (car les évaluations sont continues) et s'annule sur $(\mathcal{C}(K) \otimes 1)\Delta(\mathcal{C}(K))$ qui est dense dans $\mathcal{C}(K \times K)$. D'où Φ est identiquement nulle sur $\mathcal{C}(K \times K)$.
  Comme $\mathcal{C}(K \times K)$ sépare les points, il vient : $y = z$.
  D'où K est simplifiable à gauche.
  De même, en utilisant la densité de $(1 \otimes \mathcal{C}(K))\Delta(\mathcal{C}(K))$ dans $\mathcal{C}(K \times K)$, on montre que K est simplifiable à droite.
  D'où K est bi-simplifiable.

- On termine la preuve dans le cadre métrique dans un premier temps afin de comprendre comment l'on procède.
  La vérification du fait que la multiplication est continue est identique à celle effectuée dans la preuve du théorème 25.
  Soit $a \in K$. On considère la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Comme K est compact, il existe une extraction φ et $l \in K$ tels que $a^{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
  De même, et quitte à encore prendre une extraction, il existe $l' \in K$ et $e_a \in K$ tels que : $a^{\varphi(n)-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ et $a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e_a$.
  Alors en passant à la limite, dans $a \cdot a^{\varphi(n)-1} = a^{\varphi(n)}$, il vient par continuité de $\cdot$: $a \cdot l' = l$.
  Puis, en passant à la limite dans $a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \cdot a^{\varphi(n)} = a^{\varphi(n+1)}$, il vient : $e_a \cdot l = l$.
  D'où $e_a \cdot a \cdot l' = e_a \cdot l = l = a \cdot l'$.
  Par simplifiabilité à droite, il vient : $e_a \cdot a = a$.
  De même, on montre que $a \cdot e_a = a$.
  Par le même calcul que dans la preuve du lemme 10, on trouve que $e_a = e$ (indépendant de a).
  Quitte à prendre une extraction, il existe $\overline{a} \in K$ tel que $a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{a}$.
  Alors en passant à la limite dans $a \cdot a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1} = a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$, il vient : $a \cdot \overline{a} = e$.
  De même, $\overline{a} \cdot a = e$.
  D'où K est un groupe.
- On rédige désormais la preuve dans le cadre topologique général.
  - ✻ On considère $F = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{a^k, k \geqslant N\}} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{M_N} \subset K$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
    On a : $a \cdot F = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{a^{k+1}, k \geqslant N\}} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}^*} \overline{\{a^k, k \geqslant N\}}$.
    Soit $x \in K$, alors :
    $x \in F \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \forall V \in \mathcal{V}_K(x), \exists k_N \geqslant N, a^{k_N} \in V$.
    $x \in a \cdot F \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall V \in \mathcal{V}_K(x), \exists k_N \geqslant N, a^{k_N} \in V$.
    Clairement, on a : $F \subset a \cdot F$.
    Et $a \cdot F \subset F$ car l'on peut prendre $k_0 = k_1$.
    D'où $F = a \cdot F$.
  - ✻ $\forall N \in \mathbb{N}, \overline{M_N} \neq \emptyset$. Donc, comme K est compact, $F \neq \emptyset$. Donc il existe $l \in F$.
    On remarque que $l \in a \cdot F$, donc il existe $l' \in F$ tel que $a \cdot l' = l$.
    Pour tout $V \in \mathcal{V}_K(l)$, il existe $(k_{1V}, k_{2V}) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k_{2V} > k_{1V}$ et $(a^{k_{1V}}, a^{k_{2V}}) \in V^2$.
    On considère $F_1 = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_K(l)} \overline{\{a^{k_{2W}-k_{1W}}, W \subset V\}} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_K(l)} \overline{S_V}$ (qui joue le rôle d'ensemble des valeurs d'adhérence pour $(a^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).
    $\forall V \in \mathcal{V}_K(l), \overline{S_V} \neq \emptyset$. Donc $F_1 \neq \emptyset$. Soit $e \in F_1$.
    On suppose par l'absurde que $e \cdot l \neq l$.
    Comme K est compact, K est séparé. Donc il existe $\mathcal{O}_{e\cdot l} \in \mathcal{V}_K(e \cdot l)$ et $\mathcal{O}_l \in \mathcal{V}_K(l)$ tel que : $\mathcal{O}_{e\cdot l} \cap \mathcal{O}_l = \emptyset$.
    Par continuité de la multiplication, il existe $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{V}_K(e)$ et $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{V}_K(l)$ tels que $\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{O}_{e\cdot l}$.
    Soit $V \in \mathcal{V}_K(l)$. On suppose par l'absurde que $S_V \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$.
    Alors $S_V \subset^c \mathcal{U}_1$. Or $e \in \overline{S_V} \subset \overline{^c\mathcal{U}_1} =^c \mathcal{U}_1$. D'où $e \notin \mathcal{U}_1$.
    Contradiction. Donc pour tout $V \in \mathcal{V}_K(l)$, $S_V \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$.
    On pose $W \in \mathcal{V}_K(l)$ tel que $W \subset (\mathcal{O}_l \cap \mathcal{U}_2)$ et $a^{k_{2W}-k_{1W}} \in \mathcal{U}_1$.

Alors

$$\underbrace{\underbrace{a^{k_{1W}}}_{W\subset\mathcal{U}_2} \cdot \underbrace{a^{k_{2W}-k_{1W}}}_{\in\mathcal{U}_1}}_{\in\mathcal{O}_{e\cdot l}} = \underbrace{a^{k_{2W}}}_{\in W\subset\mathcal{O}_l} .$$

Contradiction. D'où $e \cdot l = l$. De même, on montre que $l \cdot e = l$.
Donc $e \cdot a \cdot l' = e \cdot l = l = a \cdot l'$.
Par simplifiabilité à droite, il vient : $e \cdot a = a$. De même, $a \cdot e = a$.
A priori, e est dépendant de a, mais en réalité non, comme déjà vu plus haut.

- ✻ Comme $F = a \cdot F$ et $e \in F$, il existe $\overline{a} \in F$ tel que $a \cdot \overline{a} = e$.
  De même, on montre que $\overline{a} \cdot a = e$.
  D'où K est un groupe.

- La vérification du fait que la structure groupe est compatible avec la structure topologique est identique à celle effectuée dans la preuve du théorème 25.

D'où K est un groupe compact.

Références

[Amir] Dan. Amir. *On isomorphisms of continuous function spaces.* Technion-Israel Institute of Technology. 1966.

[Bic] Julien Bichon. *Introduction aux groupes quantiques.* Cours de master 2 de l'université Blaise Pascal, 2008.
Pages 35 à 45.
Disponible en ligne à l'adresse suivante :
$http://math.univ-bpclermont.fr/\ bichon/GrQu.pdf$

[BS] E.C.H. van der Meer. *The Banach-Stone Theorem.* Bachelor thesis. Mathematical Institute, Leiden University, 2014.
Disponible en ligne à l'adresse suivante :
$https://www.math.leidenuniv.nl/scripties/BachVanderMeer.pdf$

[Cam] Michael Cambern. *On isomorphisms with small bound.* American Mathematical Society. 1966.

[Coh] H. B. Cohen. *A bound-two isomorphism between* $\mathcal{C}(X)$ *Banach spaces.* American Mathematical Society. 1974.

[Pau] Frédéric Paulin. *Topologie, analyse et calcul différentiel.* Cours de L3 de l'ENS d'ULM, 2008-2009.
Pages 37, 38, 44, 45, 74, 80 et 90.
Disponible en ligne à l'adresse suivante :
$https://www.math.ens.fr/enseignement/archives_pedagogiques.html?type = 1$

[Ray] Laure Saint-Raymond. *Analyse fonctionnelle.* Cours de L3 de l'ENS d'ULM, 2008.
Pages 9 et 10.
Disponible en ligne à l'adresse suivante :
$https://www.math.ens.fr/enseignement/archives_pedagogiques.html?type = 1$

[Rud1] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* International Editions. McGraw-Hill Inc., third edition, 1987.
Pages 116 à 130.

[Rud2] Walter Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., second edition, 1991.
Page 24 et 98.

[Vil] Cédric Villani. *Analyse II.* Cours de deuxième année de l'ENS de Lyon. 2003-2004.
Pages 7 et 15.
Disponible en ligne à l'adresse suivante :
http ://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/ana2.pdf